Insiemi aperti e chiusi

DEF: Siano $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\rho > 0$, si dice DISCO DI CENTRO x_0 E RAGGIO ρ, l'insieme:

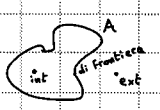
$$B(x_0,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < \rho\}$$

Consideriamo ora $A \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in A$, x_0 può essere un punto:

(i) INTERNO se $\exists \rho > 0 : B(x_0,\rho) \subset A$

(ii) ESTERNO se $\exists \rho > 0 : B(x_0,\rho) \cap A = \emptyset$

(iii) DI FRONTIERA in nessuno dei casi precedenti



N.B. x_0 interno ad A è più "forte" di $x_0 \in A$

ed indichiamo con:

(i) $\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^N : x \text{ è interno}\}$ ← PARTE INTERNA

(ii) $(\mathring{cA}) := \{x \in \mathbb{R}^N : x \text{ è esterno}\}$ ← PARTE ESTERNA

(iii) $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^N : x \text{ è di frontiera}\}$ ← FRONTIERA

(iv) $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ ← CHIUSURA

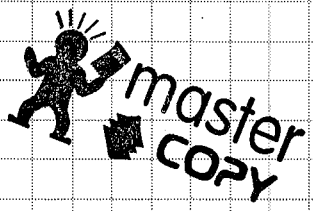


OSS: $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$

DEF: Un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice:

(i) APERTO se $A = \mathring{A} \iff \partial A \cap A = \emptyset$

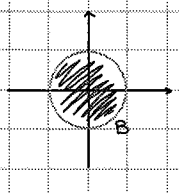
(ii) CHIUSO se $A = \bar{A} \iff \partial A \subset A$



esempio

Sia $B = B(0,1) = \{P = (x,y) : \|P\| = x^2 + y^2 < 1\}$. Notiamo che:

$\forall P = (x_0,y_0) \in B \quad r^2 = x_0^2 + y_0^2 < 1 \Rightarrow$ se $\rho > 0 : \rho + r < 1$ ho $\forall Q \in B(P,\rho)$, $\|Q\| = \|P + Q - P\| \le \|P\| + \|Q - P\| < r + \rho < 1$ (Q interno)



concludo perciò che B è aperto

DEF: Sia $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^N$, il punto x_0 si dice DI ACCUMULAZIONE se:

$\forall \rho > 0, \exists x \neq x_0 : x \in A \cap B(x_0,\rho)$ non importa quanto mi avvicini ad x_0 trovo comunque un $x \in A$ con $x \neq x_0$

in caso contrario x_0 è ISOLATO

esempio

$x=0$ è l'unico punto di accumulazione per $A=\{x=\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

Limiti e continuità

Siano $A\subset\mathbb{R}^n$ ed $f:A\to\mathbb{R}^n$ con x_0 di accumulazione per A e $\ell\in\mathbb{R}^n$. Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ se:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \rho>0 : f(A\cap B(x_0,\rho)\setminus\{x_0\})\subset B(\ell,\varepsilon) \quad \text{oppure} \quad \forall x\in A : x\in B(x_0,\rho),\ x\neq x_0 \text{ ho } \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$$

N.B. Conta solo il valore di $f(x)$ vicino a x_0, non ci interessa $f(x_0)$

Elenchiamo alcune proprietà utili:

(i) Se $f_i(x)$ sono le componenti di $f(x):A\to\mathbb{R}^n$ allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0} f_i(x)=\ell_i \quad \forall i=1,\dots,n \quad \text{con } \ell=(\ell_i)_{i=1,\dots,n}$$

(ii) Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_f$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_g \Rightarrow \lim_{x\to x_0} af(x)+bg(x)=a\ell_f+b\ell_g$

(iii) Se $C\in\mathbb{R}^n$ è chiuso, $f(A)\subset C$ e $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \ell\in C$

(iv) Se $A\subset\mathbb{R}^n$ aperto e $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in A \Rightarrow \exists \rho>0 : \forall x\in B(x_0,\rho) \Rightarrow f(x)\in A$



DEF: Una funzione $f:A\to\mathbb{R}^n$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$ si dice CONTINUA in $x_0\in A$ se:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \rho>0 : \text{se } x\in B(x_0,\rho)\Rightarrow f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$$

N.B. La continuità di f in x_0 equivale a dire $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ solamente se x_0 è di accumulazione. Infatti: se x_0 è isolato:

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non è definito

(ii) f è necessariamente continua in x_0, infatti $\exists \rho>0 : B(x_0,\rho)\Rightarrow\{x_0\} \Rightarrow \forall x\in B(x_0,\rho),\ f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)\ \ \forall \varepsilon>0$

vale però:

(i) se $f:A\to\mathbb{R}^n$ continua in $x_0 \Rightarrow \forall i=1,\dots,n$ f_i continua in x_0

(ii) somme e composizioni di f continue sono continue

OSS: f continue mandano aperti in aperti e chiusi in chiusi

DEF: Una funzione $f:A\to\mathbb{R}^n$ si dice LIPSCHITZIANA se:

$$\exists L>0 : \|f(x)-f(x_0)\|\leq L\|x-x_0\|$$

Teorema

Se f è lipschiteiana $\Rightarrow$ f è continua

esempio

Sia $f(x)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ con $f: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ e calcoliamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$



È chiaro che $(0,0)$ è di accumulazione per $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, perciò ha senso calcolare questo limite. Guardiamolo da "punti di vista" differenti: mettendoci su rette $y=mx$. Più precisamente, se consideriamo $\vec{v}=(v_1,v_2)^T\neq 0$ e $r_{\vec{v}}=\{t\vec{v} : t\in\mathbb{R}\}$, effettuando la RESTRIZIONE ALLA RETTA $r_{\vec{v}}$ di f abbiamo:

$$\varphi(t)=f(t\vec{v})=\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2 v_1^2+t^2 v_2^2}=\frac{v_1 v_2}{v_1^2+v_2^2} \Rightarrow f \text{ è costante su ogni } r_{\vec{v}}$$

tuttavia per t diversi il limite assume valori diversi, perciò non esiste.

N.B. Abbiamo usato rette, ma andava bene qualsiasi $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Vediamo come formalizzare quanto appena fatto.

DEF: Si dice CURVA una funzione $\gamma: I\to A$ con $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ e $A\subset\mathbb{R}^N$ $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$

Se consideriamo $f: A\to\mathbb{R}^M$ con $A\subset\mathbb{R}^N$ e x_0 interno ad A, abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \forall\, \gamma:[a,b]\to A \text{ continua e t.c. } \gamma(a)=x_0,\ \lim_{t\to a^+} f(\gamma(t))=\ell$$

Nel caso precedente abbiamo utilizzato γ_1 e γ_2 corrispondenti a rette. È però importante ricordare che sebbene sia sufficiente trovare due γ con limiti diversi per dimostrare che il limite non esiste, non è possibile adottare il procedimento inverso: anche controllando tutte le rette, ci sono altre infinite curve.

Vediamo ora come estendere la definizione di limite nei casi in cui abbiamo a che fare con $\pm\infty$.

DEF: Sia $A\subset\mathbb{R}^N$, dico che A è:

(i) LIMITATO se $\exists R>0 : A\subset B(x_0,R)$ con $x_0\in A$

(ii) ILLIMITATO altrimenti

Notiamo che A è illimitato se e solo se $\forall R>0,\ \exists x\in A : \|x\|>R$. Inoltre, valgono le seguenti convenzioni:

(i) Se A è illimitato, dico che ∞ è di accumulazione per A e si pone:

$$B(\infty,R)=\{x\in A : \|x\|>R\}$$

(ii) A si dice illimitato SUPERIORMENTE se $\forall R,\ \exists x\in A : x>R$ ($+\infty$ è di accumulazione), ed INFERIORMENTE se $\forall R,\ \exists x\in A : x<R$ ($-\infty$ di accumulazione per A)

a questo punto la definizione di limite è completa.

DEF: Siano $f: A \to \mathbb{R}^n$ con x_0 di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\ell \in \mathbb{R}^n \cup \{\pm\infty\}$, si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0 : f(B(x_0, \rho) \cap A \setminus \{x_0\}) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

x_0 può anche essere $\pm\infty$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

(i) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e g è limitato inferiormente $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$

(ii) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e g è limitato superiormente $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = -\infty$

(iii) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\inf g(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

(iv) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e $\sup g(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

(v) se, date $f: A \to \mathbb{R}^n$ e $g: A \to \mathbb{R}$, vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ e $\inf |g(x)| > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot f(x) = \infty$



DEF: Si dice successione una funzione $a_n : A \to \mathbb{R}^n$ con $A = \{n > n_0 : n_0 \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$

Per le successioni ha senso fare il limite solo per $n \to +\infty$. Indicheremo con $a_n \to \ell$, $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$

OSS: $a_n \to \ell \in \mathbb{R}^n \iff a_n^{(x)} \to \ell^{(x)}$ $\forall x = 1, \dots, n$ componente x-esima con $a_n = (a_n^{(x)})_{x=1,\dots,n}$ e $\ell = (\ell^{(x)})_{x=1,\dots,n}$

PROP: Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora:

(i) x_0 è di accumulazione per $\Omega \Rightarrow \exists\, a_n : A \to \Omega : \forall n \in \Omega,\ a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$

(ii) Ω è chiuso $\iff \forall a_n : A \to \Omega : a_n \to \ell$ si ha $\ell \in A$

(iii) Ω è aperto $\iff \forall\, a_n : A \to \mathbb{R}^n : a_n \to \ell \in \Omega,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ \ a_n \in \Omega$



Teorema

Sia $f: A \to \mathbb{R}^n$ con x_0 di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{R}^n$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall (a_n) \text{ di punti in } A \setminus \{x_0\} : a_n \to x_0 \text{ si ha } f(a_n) \to \ell$$

Notiamo che il teorema è utile in entrambi i versi:

(i) se trovo $(a_n), (b_n)$ di punti di A t.c. $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$ e $a_n, b_n \to x_0 \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

(ii) se trovo il valore a cui tende $f(a_n)$, $\forall (a_n) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

In generale per risolvere un limite proviamo curve o successioni per "farci un'idea" e se esiste proviamo a dimostrarlo con maggiorazioni o passando alle polari. In quest'ultimo caso si ha:

(i) $\lim_{(x,y) \to -\infty} f(x,y) = \infty \iff \lim_{\rho \to +\infty} \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} \tilde{f}(\rho, \theta) = +\infty$

(ii) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 \iff \lim_{\rho \to 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \tilde{f}(\rho, \theta) = 0$

esempio

Calcoliamo $\lim_{(x,y)\to\infty}\begin{pmatrix}x+3\\3x-y\end{pmatrix}$ Proviamo prima con una retta (tv_1, tv_2):

$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}tv_1+3\\3tv_1-tv_2\end{pmatrix}=\infty$ $\longmapsto \|f\|\to+\infty$

perché se esiste il limite fa $+\infty$. Osserviamo che:

$\|f\|^2=(x+3)^2+(3x-y^2)=10x^2+y^4-6xy+6x+9$

passando in polari:

$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\\ y=\rho\cos\theta\end{cases}\longrightarrow\|\tilde{f}(\rho,\theta)\|^2=10\rho^2\sin^2\theta+\rho^4\cos^4\theta-6\rho^3\sin\theta\cos\theta+6\rho\cos\theta+9$ ← trovo min e controllo se funziona

Teoremi sulle funzioni continue

Vediamo ora dei teoremi, che utilizzeremo più avanti, sulle funzioni continue.

Teorema di Weierstrass

Sia $f:K\to\mathbb{R}$ continua, se $K\subset\mathbb{R}^N$ è chiuso e limitato allora $\exists x_1,x_2\in K: f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\ \forall x\in K$. Ovvero $\exists x_1,x_2\in K$ tali che:

$$f(x_1)=\min_{x\in K}f(x) \quad e \quad f(x_2)=\max_{x\in K}f(x)$$

Variante a Weierstrass

Sia $f:K\to\mathbb{R}$ continua e tale che:

(i) se $x_n\in\partial K\setminus K\Rightarrow\lim_{x\to x_n}f(x)=+\infty$

(ii) se K è illimitato $\Rightarrow\lim_{\|x\|\to\infty}f(x)=+\infty$

allora f ammette minimo

esempio

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $f(x,y)=4x^2+y^4-12xy$. Notiamo $\partial K=\emptyset$, dunque (i) è ovvia, inoltre:

$\lim_{(x,y)\to\infty}4x^2+y^4-12xy=+\infty$

infatti $4x^2+y^4-12xy\ge 4x^2+y^4-2x^2-18y^2\longrightarrow+\infty$ Dunque vale anche (ii) e f ammette minimo.

DEF: Un insieme A si dice CONNESSO (PER ARCHI) se:

$$\forall P,Q\in A\ \exists\ \gamma:[a,b]\to A:\gamma(a)=P \ e\ \gamma(b)=Q$$