INSIEMI

DEF: UN INSIEME È UNA "COLLEZIONE" DI OGGETTI, DETTI ELEMENTI
(INFORMALE)

NOTAZIONE: LETTERE MAIUSCOLE (A, B, C ... G, H ...) → INSIEMI

DESCRIVERE UN INSIEME:

- [DESCRIZIONE / X ELENCO] → ES: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-7, 0, 5\}$, $C = \{\square, \star\}$, $D = \{A, B, C\}$

OSS:

1- L'ORDINE DEGLI ELEMENTI NON È IMPORTANTE
ES: $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$

2- GLI ELEMENTI RIPETUTI NELL'INSIEME VALGONO 1 VOLTA
ES: $E = \{1\} = \{1, 1, 1\} = \{1, 1, 1, 1, 1\} \dots$
$F = \{-2, 0\} = \{-2, -2, 0\} = \{-2, 0, -2, 0\}$

ATTENZIONE → SE L'INSIEME È INFINITO, È IMPOSSIBILE DESCRIVERLO CON UN ELENCO.

- [DESCRIZIONE / X PROPRIETÀ] → L'INSIEME È CARATTERIZZATO SOLO X LE SUE PROPRIETÀ, CIOÈ CERTE PROPRIETÀ DEI SUOI ELEMENTI

ES: DESCRIZIONE INSIEME NUMERI DISPARI → $A = \{1, 3, 5, 7 \dots\}$ (DESCRIZIONE IMPRECISA) $= \{\text{NUMERI NATURALI DISPARI}\}$ (DESCRIZIONE PRECISA)

NOTAZIONE: LETTERE MINUSCOLE (a, b, c ... g, h ...) → ELEMENTI

NOTAZIONE:

"L'ELEMENTO x APPARTIENE ALL'INSIEME A" = $\boxed{x \in A}$ (OPPURE $A \ni x$)
"L'ELEMENTO x NON APPARTIENE ALL'INSIEME A" = $\boxed{x \notin A}$ (OPPURE $A \not\ni x$)
ES: $A = \{2, 3\}$ $2 \in A$, $3 \in A$, $0 \notin A$, $6 \notin A$

DEF: SIANO A E B INSIEMI.
DICIAMO CHE (B) È CONTENUTO IN (A), E SCRIVIAMO

$\boxed{B \subseteq A}$

SE OGNI ELEMENTO DI B APPARTIENE AD A, CIOÈ
SE PER OGNI $b \in B$, ALLORA $b \in A$ $[\forall b \in B \Rightarrow b \in A]$

ES: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1\}$

- $1 \in C$ e $1 \in A \Rightarrow C \subseteq A$
- $B \not\subseteq C$ e $3 \in A \Rightarrow A \not\subseteq C$ (NON CONTENUTO)

- $0 \in B$ MA $0 \notin A$
  $1 \in B$ E $1 \in A$
  $2 \notin B$ MA $2 \in A$
  $3 \notin B$ MA $3 \in A$
  $\Rightarrow B \not\subseteq A$, $A \not\subseteq B$

DEF: SIANO A E B INSIEMI.
DICIAMO CHE A È UGUALE A B (E VICEVERSA) E SCRIVIAMO

$$\boxed{A = B}$$

SE TUTTI GLI ELEMENTI DI A SONO ANCHE ELEMENTI DI B E VICEVERSA, CIOÈ

$$[A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A]$$

↖ SE E SOLO SE

OSS: $A \subseteq A$

PIÙ PRECISAMENTE, LA DEFINIZIONE DI $\subseteq$ DATA PRIMA È LA DEFINIZIONE DI "CONTENUTO O UGUALE"

NOTAZIONE: SE $B \subseteq A$ MA $B \neq A$, ALLORA B È STRETTAMENTE CONTENUTO IN A E SCRIVIAMO

$$\boxed{B \subsetneq A} \quad (\text{OPPURE } B \subset A)$$

OSS: $B \subsetneq A$ IMPLICA CHE ESISTA $a \in A$ TALE CHE $a \notin B$

ES: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$ $\quad 1 \in A$ MA $1 \notin B$, MA $B \subsetneq A$

DEF: SIANO A E B INSIEMI.
CHIAMIAMO INSIEME VUOTO, E LO DENOTIAMO CON ϕ, L'UNICO INSIEME CHE NON CONTIENE ALCUN ELEMENTO

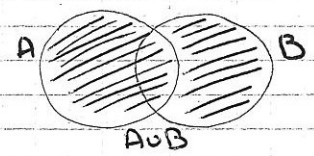
OSS: PER QUALSIASI INSIEME A, SI HA $\boxed{\phi \subseteq A}$

OPERAZIONI TRA SISTEMI

DEF: SIANO A E B INSIEMI.
CHIAMIAMO UNIONE DI A E B, L'INSIEME $\boxed{A \cup B}$ PER CUI I SUOI ELEMENTI APPARTENGONO O AD A O A B (O A ENTRAMBI), CIOÈ:

$$[x \in A \cup B \iff x \in A \text{ OPPURE } x \in B]$$

OSS: $A \cup B = B \cup A$
$A \cup A = A$
$A \cup \phi = A$



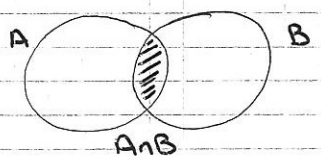
ES: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in A \\ 2 \in A \text{ e } 2 \in B \\ 3 \in A \text{ e } 3 \in B \\ 4 \in B \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4\}$$

DEF: CHIAMIAMO INTERSEZIONE TRA A E B, L'INSIEME $\boxed{A \cap B}$ PER CUI I SUOI ELEMENTI APPARTENGONO SIA AD A CHE A B, CIOÈ:

$$[x \in A \cap B \iff x \in A \text{ e } x \in B]$$

OSS: $A \cap A = A$
$A \cap \phi = \phi$
SE $B \subseteq A$ $\quad A \cap B = B$
$A \cap B \subseteq A$ $\quad A \cap B \subseteq B$
$A \cap B \subseteq A \cup B$



ES: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$

$\left.\begin{array}{l}1\in A\\ 2\in A \text{ e } 2\in B\\ 3\in A \text{ e } 3\in B\\ 4\in B\end{array}\right\} \Rightarrow A\cap B=\{2,3\}$

DEF: CHIAMIAMO DIFFERENZA DI (B) DA (A), L'INSIEME $A\setminus B$ PER CUI I SUOI ELEMENTI SODDISFANO LA SEGUENTE PROPRIETA':
ESSI APPARTENGONO AD A, MA NON A B

$$[x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A \text{ e } x\notin B]$$

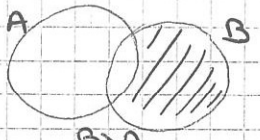
OSS: IN GENERALE, $A\setminus B\neq B\setminus A$

$A\setminus A=\phi$

$A\setminus\phi=A$



$A\setminus B$



$B\setminus A$

master COPY

ES: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$

$\left.\begin{array}{l}1\in A \text{ e } 1\notin B\\ 2\in A \text{ e } 2\in B\\ 3\in A \text{ e } 3\in B\\ 4\notin A \text{ e } 4\in B\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}A\setminus B=\{1\}\\ B\setminus A=\{4\}\end{array}$

master COPY

DEF: ASSUMIAMO CHE $B\subseteq A$
CHIAMIAMO COMPLEMENTARE DI (B) IN (A), L'INSIEME $A\setminus B$



$A\setminus B$

(B^c)
COMPLEMENTARE

PRODOTTO CARTESIANO

SIANO A E B INSIEMI.

DEF: IL PRODOTTO CARTESIANO TRA (A) E (B) È L'INSIEME $A\times B$ FORMATO DALLE COPPIE ORDINATE (a,b) CON $a\in A$ e $b\in B$

ES: $A=\{1,\Delta\}$, $B=\{2,\square\}$

$A\times B=\{(1,2),(1,\square),(\Delta,2),(\Delta,\square)\}$

$A\times A=\{(1,\Delta),(1,1),(\Delta,1),(\Delta,\Delta)\}$

$B\times B=\{(2,2),(2,\square),(\square,2),(\square,\square)\}$

master COPY

OSS: · $A\times B\neq B\times A$

· LE COPPIE $(1,\Delta)$ e $(\Delta,1)$ SONO DIVERSE, CIOÈ
$(1,\Delta)\neq(\Delta,1)$ COPPIE
MA $\{1,\Delta\}=\{\Delta,1\}$ INSIEMI $\rightarrow$ $A=\{1,\Delta\}$, $C=\{\Delta,1\}$
$A\times A=C\times C$

DEF: SIA A UN INSIEME FINITO.
CHIAMIAMO IL NUMERO DEI SUOI ELEMENTI LA CARDINALITA' DI (A) E LA DENOTIAMO CON $|A|$

OSS: A, B FINITI $\rightarrow |A\times B|=|A|\times|B|$

INSIEME DELLE PARTI

SIA A UN INSIEME.

DEF: L'INSIEME DELLE PARTI DI (A) È L'INSIEME $\boxed{P(A)}$ I CUI ELEMENTI SONO TUTTI I SOTTOINSIEMI DI A, CIOÈ:

$$P(A) = \{B \text{ INSIEME} \mid B \subseteq A\}$$

(| = TALE CHE)



ES 1: $A = \{1, d\}$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{d\}, A\}$

ES 2: $A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

ES 3: $P(\phi) = \{\phi\} \Rightarrow |P(\phi)| = 1$

$P(P(\phi)) = P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$

OSS: SIA A UN INSIEME FINITO, ALLORA → P(A) INSIEME FINITO, $|P(A)| = 2^{|A|}$

ESERCIZIO: $P(P(P(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

ESERCIZI

① $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ → PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DI $\cup$

② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ → PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DI $\cup$

③ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ → PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DI $\cap$

④ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ → PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DI $\cap$

PRINCIPIO D'INDUZIONE

INSIEME DEI NUMERI NATURALI → $(\mathbb{N}) = \{1, 2, 3 \ldots\}$

[METODO PER VERIFICARE CHE UN ENUNCIATO P_n SIA VERO O FALSO AL VARIARE DEL PARAMETRO n IN $\mathbb{N}$]

ES: SIA P_n L'ENUNCIATO "n È PARI"

- CONSIDERIAMO P_4, IN CUI $n=4$ → P_4 = "4 È PARI" VERO
- CONSIDERIAMO P_3, IN CUI $n=3$ → P_3 = "3 È PARI" FALSO

ES: SIA P_n L'ENUNCIATO P_n: $n^2 \geq n+4$

- CONSIDERIAMO P_1, IN CUI $n=1$ → $1^2 \geq 1+4$ FALSO
- CONSIDERIAMO P_{10}, IN CUI $n=10$ → $10^2 \geq 10+4$ VERO

OBIETTIVO: PROVARE CHE UN CERTO ENUNCIATO (P_n) SIA VERO:

① PER QUALUNQUE $n \in \mathbb{N}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

OPPURE

② PER QUALUNQUE $n \in \mathbb{N}$ TALE CHE $n \geq K$ CON K FISSATO $(\forall n \geq k)$

① PRINCIPIO DI INDUZIONE: SIA P_n UN ENUNCIATO CHE DIPENDE DA n IN $\mathbb{N}$

IPOTESI:

1- PASSOBASE: P_0 SIA VERA, CIOÈ P_n CON $n=0$;

2- PASSO INDUTTIVO: $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA CHE:
SE P_n È VERO, ALLORA ANCHE P_{n+1} È VERO.

TESI:
ALLORA, L'ENUNCIATO P_n È VERO $\forall n \in \mathbb{N}$

② PRINCIPIO DI INDUZIONE: SIA P_n UN ENUNCIATO CHE DIPENDE DA n IN $\mathbb{N}$

IPOTESI:

1- PASSOBASE: P_K SIA VERA, CIOÈ P_n CON $n=K$;

2- PASSO INDUTTIVO: $\forall n \geq K$ SI HA CHE:
SE P_n È VERO, ALLORA ANCHE P_{n+1} È VERO

TESI:
ALLORA, L'ENUNCIATO P_n È VERO $\forall n \geq K$

ESEMPIO 1: DIMOSTRARE CHE

$$\sum_{K=0}^{n} K = 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{È VERO } \forall n \in \mathbb{N}$$

(SOMMATORIA)

(PB) $n=0 \rightarrow 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} \Rightarrow P_0$ VERA

(PI) $\sum_{K=0}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{K=0}^{n+1} K = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{K=0}^{n+1} K = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ (PI) VERO

(PB) E (PI) VERIFICATI, QUINDI POSSO APPLICARE IL PRINCIPIO D'INDUZIONE E AFFERMARE CHE: P_n È SEMPRE VERO $\forall n \in \mathbb{N}$

OSS: UN ALTRO MODO DI RICAVARE L'UGUAGLIANZA

$$\begin{array}{l} 0+1+2+\ldots+(n-1)+n = S \\ n+(n-1)+\ldots+1+0 = S \end{array}$$

$$n+n+n\ldots+n = 2S \rightarrow$$

n È RIPETUTO $(n+1)$ VOLTE

$$\rightarrow n(n+1) = 2S$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$