1- INSIEMI

~Un INSIEME è una "collezione" di oggetti

Gli INSIEMI vengono denotati con le lettere maiuscole e possono essere descritti per Elenco o per Proprietà

- per Elenco

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{-7, 0, 5\}$, $C = \{\square, \star\}$

Nota Bene
- l'ordine non è importante
- gli elementi ripetuti contano una sola volta

- per Proprietà

$A = \{1,3,5,\ldots\} = \{\text{numeri naturali dispari}\}$
imprecisa — descrizione precisa

Gli "oggetti" che fanno parte di un INSIEME si chiamano ELEMENTI e vengono indicati con le lettere minuscole

~Siano A e B due insiemi. Diciamo che B è contenuto in A, e scriviamo $B \subseteq A$, se ogni elemento di B appartiene anche ad A

se $b \in B$ allora $b \in A$
$(b \in B \Rightarrow b \in A)$

• Esempio

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{1\}$

$1 \in C, 1 \in B, 1 \in A \Rightarrow C \subseteq B, C \subseteq A$

$0 \in B, 0 \notin C, 0 \notin A \Rightarrow B \not\subseteq C, B \not\subseteq A$

~Siano A e B due insiemi. Diciamo che A è uguale a B, e cioè' $A = B$, se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B e viceversa

$A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
$(A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A)$

Attenzione
Se $B \subseteq A$ ma $B \neq A$ diciamo che B è "strettamente contenuto" in A, indicandolo con $\subsetneq$ oppure solo $\subset$

~Chiamiamo "insieme vuoto", e lo denotiamo con $\emptyset$, l'unico insieme che non contiene nessun elemento

master COPY COPISTERIA

OPERAZIONI TRA INSIEMI

Siano A e B due insiemi

~ Chiamiamo "UNIONE" di A e B l'insieme $A \cup B$ per cui i suoi elementi appartengono o ad A o a B
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ o $x \in B$ (o a entrambi)

~ Chiamiamo "INTERSEZIONE" di A e B l'insieme $A \cap B$ per cui i suoi elementi appartengono sia ad A che a B
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$

~ Chiamiamo "DIFFERENZA" di B da A l'insieme $A \setminus B$ per cui i suoi elementi appartengono ad A ma non a B
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$

PRODOTTO CARTESIANO

~ Siano A e B due insiemi. Il PRODOTTO CARTESIANO tra A e B è l'insieme $A \times B$ delle COPPIE ORDINATE (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$

- Esempio

$A = \{1, d\}$, $B \{2, \square\}$

- $A \times B = \{(1,2), (1,\square), (d,2), (d,\square)\}$
- $B \times A = \{(2,1), (\square,1), (2,d), (\square,d)\}$
- $A \times A = \{(1,1), (1,d), (d,1), (d,d)\}$

Attenzione
$(a,b) \neq (b,a)$ perché nelle COPPIE ORDINATE l'ordine è importante.
Perciò $A \times B \neq B \times A$

CARDINALITA'

~ Sia A un insieme finito. Chiamiamo la quantità di elementi che contiene la "CARDINALITA'", indicata con $|A|$

Osservazione
se A e B sono insiemi finiti
allora $A \times B$ è finito e $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- Esempio

$A = \{1, d\}$, $B \{2, \square, h\}$ $\quad |A| = 2 \quad |B| = 3$

$A \times B = \{(1,2), (1,\square), (1,h), (d,2), (d,\square), (d,h)\}$ $\quad |A \times B| = 2 \cdot 3 = 6$

INSIEME DELLE PARTI

~ Sia A un insieme. L'insieme delle parti di A è l'insieme $P(A)$, i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A
$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

- Esempio

- $A = \{1, d\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{d\}, \{1, d\}\}$
- $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow |P(\emptyset)| = 1$

Osservazione
Se A è un insieme finito allora anche $P(A)$ è un insieme finito. Si ha che $|P(A)| = 2^{|A|}$

2 - Principio di Induzione

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri Naturali = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

P_n = Enunciato che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che a seconda dei valori assunti da n l'enunciato può essere vero o falso

- Esempio

P_n = "n è pari"
- P_4 = "4 è pari" → vero
- P_3 = "3 è pari" → falso

P_n = "$n^2 \geq n+4$"
- P_{10} = "$100 \geq 14$" → vero
- P_1 = "$1 \geq 5$" → falso

Pmaster copy

— Obiettivo
Provare che un certo enunciato P_n è vero $\forall n \in \mathbb{N}$
(oppure $\forall n \geq K_0$, K_0 fissato) usando il Principio di Induzione

Per il principio di induzione supponiamo che
1- P_0 sia vera (P_n con $n=0$)
2- Se P_n è vera allora è vera anche P_{n+1}
Allora l'enunciato P_n è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione Concettuale
Per il passo ① P_0 è vera
Applicando il passo ② a $n=0$
otteniamo P_0 è vera $\Rightarrow P_{0+1}$ è vera
Applicando il passo ② a $n=1$
otteniamo P_1 è vera $\Rightarrow P_{1+1}$ è vera
Ripetendo l'operazione all'infinito
avremo che per ogni P_n anche
il suo successivo è vero e quindi $\forall n \in \mathbb{N}$

Nomenclatura
① → Passo Base
② → Passo Induttivo

Nella pratica per provare che un enunciato P_n è vero devo
- verificare che P_0 sia vero
- verificare che assumendo P_n vera anche P_{n+1} sia vera

Se questi punti sono verificati allora P_n è sempre vera

- Esempio 1
Dimostrare che il seguente enunciato è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{0+1+2+3+\dots+n}_{\sum_{k=0}^{n} k} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\sum_{k=0}^{n} k$ → sommatoria da k a n

Dimostrazione per Induzione

Passo base $n=0$ $\quad 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓

Passo induttivo

Ipotesi $\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi $\quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \quad \text{Per ipotesi}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{Manipolazioni Algebriche}$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

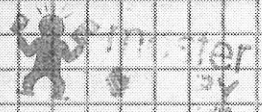
Nota Bene
l'induzione non rivela il valore di un enunciato. Rivela solamente se un enunciato è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

Metodo Alternativo

$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = S$ Somma
$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = S$
$n + n + n + \dots + n + n = 2S$
$(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = 2S$
$n(n+1) = 2S$
$\frac{n(n+1)}{2} = S$

• Esempio 2

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Dim per Induzione

Passo base $n=0$ $\quad 0^2 = \frac{0(0+1)(0+2)}{6}$

Passo induttivo

Ipotesi $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$0^2+1^2+\dots+n^2+(n+1)^2 =$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$

$\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} =$

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2$

Abbiamo provato che il passo induttivo è vero e quindi abbiamo dimostrato il teorema

• Esempio 2★

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(3n+1)}{6}$$

Dimostrazione per Sostituzione $n=1$

$\frac{1(1+1)(3+1)}{6} = 1^2$

$\frac{4}{3} = 1$ ✗

Il Teorema è dimostrato falso

Dim per Induzione

Passo base $n=0$ $\quad 0^2 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$ ✓

Passo Induttivo

Ipotesi $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(3n+1)}{6}$

Tesi $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(3n+4)}{6}$

△ Esercizio

Dimostrare $\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3+1^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dim per Induzione

P.base $n=0$ $\quad 0^3 = \left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2$ ✓

P. induttivo

Ipotesi $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Tesi $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

$0^3+1^3+\dots+n^3+(n+1)^3 =$

$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4}{4} =$

$\frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4}{4} =$

$\frac{n^2(n^2+2n+1)+4n(n^2+2n+1)+4(n^2+2n+1)}{4} =$

$\frac{(n^2+4n+4)(n^2+2n+1)}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{2^2} = \left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]^2$

Abbiamo provato che il passo induttivo è vero dimostrando l'equazione $\forall n \in \mathbb{N}$

• Esempio 3

$a^0+a^1+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$ e $a\neq 1$

Dim per Induzione

P.base $n=0$ $\quad a^0=\frac{a^{0+1}-1}{a-1}$ ✓

P. induttivo

Ipotesi $\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi $\sum_{k=0}^{n+1} a^k=\frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

$a^0+a^1+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}=$

$\frac{a^{n+1}-1}{a-1}+a^{n+1}=\frac{a^{n+1}-1+(a-1)(a^{n+1})}{a-1}$

$\frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}=\frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Abbiamo verificato che il passo induttivo è vero, dimostrando quindi che anche l'enunciato è vero $\forall n\in\mathbb{N}$ e $\forall a\neq 1$

△ Esercizio

Dimostrare $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$

Dim per Induzione

P.base $n=1$ $\quad \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$ ✓

P. induttivo

Ipotesi $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

Tesi $\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n+1}{n+2}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$

$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=$

$\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$

Verificato il passo induttivo
2→ Verificato l'enunciato

• Esempio 4

Sia A un insieme finito con $|A|=n$. Allora $|P(A)|=2^n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Dim per Induzione

P.base $n=0$ $\quad |A|=0\Rightarrow A=\varnothing$

$P(A)=P(\varnothing)=\{\varnothing\}\Rightarrow |P(A)|=1=2^0$ ✓

P. induttivo

Ipotesi $\quad |A|=n\Rightarrow |P(A)|=2^n$

Tesi $\quad |A|=n+1\Rightarrow |P(A)|=2^{n+1}$

Verificato il passo induttivo
2→ Verificato l'enunciato

Sia A un insieme costituito da $n+1$ elementi $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$.
I sottoinsiemi B di A possono essere di due tipi:
1- non contenenti a_{n+1} $(a_{n+1}\notin B)$
2- contenenti a_{n+1} $(a_{n+1}\in B)$
Nel primo caso, per definizione, $a_{n+1}\notin B\Rightarrow B\subset\{a_1,\cdots,a_n\}$ e quindi per ipotesi esistono 2^n sottoinsiemi di questo tipo.
Nel secondo caso, per definizione, $a_{n+1}\in B\Rightarrow B\setminus\{a_{n+1}\}\subset\{a_1,\cdots,a_n\}$.
Di conseguenza, come nel primo caso, esistono 2^n sottoinsiemi di questo tipo.
Considerato ciò il numero totale di sottoinsiemi di A è:

$|P(\{a_1,\cdots,a_n,a_{n+1}\})|=2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$