





ELEMENTI INTRODUTTIVI

Elementi introduttivi

Con il termine FLUIDO ci si riferisce a tutti gli elementi liquidi e gassosi. Essi sono accomunati dalla caratteristica della DEFORMABILITÁ, ovvero dalla capacitá di cambiare forma sotto l'azione di forze TANGENZIALI anche infinitesime. Da ció segue che se il fluido é in uno stato di quiete, esso puó sostenere solo forze DI PRESSIONE (normali alla superficie). Le cause di queste proprietá macroscopiche le troviamo nella struttura molecolare dei fluidi:

(i) LIQUIDI → molecole organizzate in gruppi che si muovono abbastanza liberamente.

(ii) GAS → molecole libere di muoversi su distanze molto grandi a causa delle loro interazioni molto deboli (nulle nei gas perfetti, nei quali consistono solo nelle collisioni, attraverso le quali si scambiano energia).

In generale possiamo peró prescindere dal moto delle singole molecole e descrivere il comportamento del fluido a livello macroscopico. Se supponiamo di misurare la massa di fluido δm contenuta in un volume infinitesimo δV osserviamo un andamento come in figura. Osserviamo come al crescere di δV cambi significativamente la misura. Infatti, aumentando il volume, aumenta significativamente il numero di molecole. Quando il δV é sufficientemente grande vediamo come la misura si stabilizza, essendo il numero di molecole molto maggiore e quindi praticamente indipendente da piccole variazioni di δV. Infine, allargando ulteriormente δV questo non puó piú essere considerato infinitesimo e quindi la misura puó variare, perché la mia misura comprende zone vaste, dove le proprietá possono cambiare.



Si definisce cosi la PARTICELLA FLUIDA come un δV puntiforme, ma abbastanza esteso da contenere un numero di molecole sufficientemente elevato da rendere il valore di ogni grandezza STATISTICAMENTE STAZIONARIO (indipendente da piccole variazioni di δV). Posso definire il concetto di particella fluida solo per fluidi abbastanza densi, condizione che si verifica nella maggior parte dei casi di interesse aeronautico. In questi casi diremo che vale l'IPOTESI DI MEZZO CONTINUO e tutte le grandezze fluidodinamiche saranno riferite ad una particella fluida ed ottenute perció come media sulle molecole che ne fanno parte.

Vediamo quindi quali sono le grandezze di nostro interesse:

(i) DENSITÁ → $\rho(P) = \frac{\delta m}{\delta V}$ (Punto)

(ii) VOLUME SPECIFICO → $v = \frac{1}{\rho} = \frac{\delta V}{\delta m}$

(iii) COEFFICIENTE DI COMPRIMIBILITÁ → $K = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) > 0$ può essere misurato a temperatura o entropia costante

Piú K é alto e piú il fluido é comprimibile. In generale i liquidi sono poco comprimibili, al contrario dei gas (es. $K_{H_2O} \cong 5 \times 10^{-7}$ a temp ambiente). Infatti per i liquidi si usa spesso il modello di fluido incomprimibile ($\rho = cost.$)

(iv) VELOCITÁ → $\vec{v}(x,y,z,t) = (u,v,w)$ oppure $\vec{v}(x_1,x_2,x_3,t) = (u_1,u_2,u_3)$

master COPY

Vediamo quindi le forze agenti su una particella fluida:

(i) FORZE DI VOLUME (o MASSA) → sono proporzionali al volume (o alla massa) e sono dovute a campi di accelerazione a cui il fluido è sottoposto (es. forza peso $\rightarrow d\vec{F}_p = \rho \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{VOLUME}} \vec{g}$). Generalmente sono forze note ed indipendenti dal moto.

(ii) FORZE DI CONTATTO → agiscono sulla superficie della particella fluida e sono dovute al contatto con il resto del fluido o con una superficie solida (es. corpo immerso nel fluido). Esse dipendono dal moto e perciò non sono generalmente note a priori. Queste possono inoltre essere divise in:

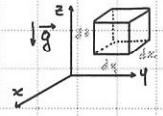
- FORZE DI PRESSIONE

Agiscono in direzione normale al volume:



$d\vec{F}_{PRES} = -p\,dS\,\vec{n}$ con $\vec{n}$ versore normale uscente

Se il fluido è in quiete, le forze di pressione seguono la legge di Stevino. Se infatti consideriamo un volume infinitesimo come in figura, imponendo l'equilibrio statico:



$\underbrace{\vec{F}}_{\text{RISULTANTE}} = \vec{0}$.

In componenti abbiamo così:

$$x \rightarrow\ p(x)\,dy\,dz - p(x+dx)\,dy\,dz = 0 \Rightarrow p(x) = p(x+dx)$$
$$y \rightarrow\ p(y)\,dx\,dz - p(y+dy)\,dx\,dz = 0 \Rightarrow p(y) = p(y+dy)$$
$$z \rightarrow\ p(z)\,dx\,dy - \rho_{FLUIDO}\,g\,dx\,dy\,dz - p(z+dz)\,dx\,dy = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(z) = p(z+dz) - \rho_{FLUIDO}\,g\,dz.$$

Abbiamo perciò che la pressione è costante sui piani perpendicolari all'accelerazione di gravità. Sul piano verticale invece vale la legge di Stevino o Laplace, sopra ricavata in forma infinitesima. Integrando i due membri:

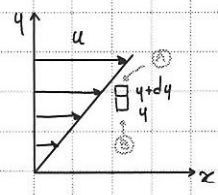
$$p(z_2) - p(z_1) = -g \int_{z_1}^{z_2} \rho\,dz$$

che per un fluido incomprimibile diventa:

$$p(z_2) - p(z_1) = -\rho g (z_2 - z_1).$$

- FORZE TANGENZIALI

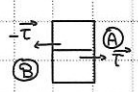
Sono presenti solo quando il fluido è in moto. Per capirne la causa consideriamo ad esempio un gas perfetto in moto UNIDIREZIONALE (campo delle velocità parallelo ad una retta). Se prendia



mo due particelle Fluide, in un campo di velocità come in figura:

$u(y+dy) > u(y)$.

Essendo il fluido un gas perfetto, le molecole sono libere di muoversi, perciò avranno velocità casuali, la cui media sarà la velocità della particella fluida. Dopo un intervallo di tempo dt, le due particelle Fluide si sono perciò "scambiate" delle molecole, e complessivamente avranno così cambiato velocità media. In particolare, le particelle che da Ⓑ (più lente) passano ad Ⓐ, tendono a diminuire la velocità di quest'ultima. Al contrario Ⓑ è accelerata dalle "ex-particelle" di Ⓐ che vi prendono parte. Ciò si traduce in una forza $\vec{\tau}$ esercitata da Ⓐ su Ⓑ ed una uguale ed opposta di Ⓑ su Ⓐ. Le Forze tangenziali sono perciò dovute allo scambio di quantità di moto tra le particelle Fluide, a loro volta causato dal moto delle molecole.





Quanto appena visto ci permette di dire che le forze tangenziali $\vec{\tau}$ dipendono da gradiente di velocità e temperatura. Per molti fluidi è valido il modello di FLUIDO NEWTONIANO, che stabilisce una proporzionaità tra forze tangenziali e gradiente di velocità:

$$\tau_x = \mu(T)\frac{du}{dy} \qquad \text{con} \quad \mu(T) \rightarrow \text{VISCOSITÁ}.$$

La viscosità $\mu(T)$ è a sua volta proporzionale, nei gas perfetti, alla radice della temperatura. Per un liquido il meccanismo è più complesso, ma il modello newtoniano resta valido per una gran parte di essi (tra cui l'acqua). Tuttavia cambia completamente il comportamento di $\mu(T)$, fortemente decrescente. Alcuni esempi di fluidi non newtoniani sono il sangue ed i polimeri allo stato liquido, tuttavia tratteremo solo i Fluidi per cui sia valida l'ipotesi di fluido newtoniano. In un fluido generico tridimensionale vale quanto visto lungo le componenti. Un coefficiente che ci tornerà utile è la VISCOSITÁ CINEMATICA:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Un fenomeno con la stessa origine Fisica di quanto visto è il trasporto di calore, che in un gas avviene attraverso il moto casuale delle molecole, che scontrandosi scambiano energia termica. In questo caso il modello è quello di Fourier:

FLUSSO DI CALORE

$$q_y = -K(T)\frac{dT}{dy}$$

dove $K(T)$ è il COEFFICIENTE DI CONDUCIBILITÁ TERMICA, che è proporzionale alla ra-

dice di T per un gas, mentre é crescente per un liquido. L'estensione al caso generale in 3 dimensioni é analoga lungo le tre direzioni. Avremo perció il vettore FLUSSO DI CALORE:

$$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$$

per cui vale:

$$\vec{q} = -K(T)\,\vec{\nabla}T(x,y,z,t) = -K(T)\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)^T$$

É importante osservare che il gradiente, in meccanica e fluidodinamica, é un operatore SPAZIALE (non si considera la derivata rispetto al tempo).

Numero di Mach

Il numero di Mach é definito come il rapporto tra la velocitá locale del fluido in un punto e la velocitá del suono (nello stesso punto):

$$M(x,y,z,t) = \frac{\|\vec{V}(x,y,z,t)\|}{a(x,y,z,t)}.$$

La velocitá del suono é definita come la velocitá di propagazione di un disturbo infinitesimo di pressione. A livello matematico invece, si definisce nel seguente modo:

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{S=ost.}$$ a → velocitá del suono, S → entropia

In particolare, nel caso di un gas perfetto:

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{S=ost.} \overset{\text{LEGGE GAS PERFETTI}}{=} \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT \Rightarrow a = \sqrt{\gamma RT}$$ ← N.B. a dipende solo da T

dove nel primo passaggio abbiamo utilizzato la legge dell'isoentropica per un gas perfetto:

$$p\rho^{-\gamma} = ost. \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

da cui:

$$d(p\rho^{-\gamma}) = 0 \Rightarrow \rho^{-\gamma}dp + p\,d(\rho^{-\gamma}) = 0 \Rightarrow \rho^{-\gamma}dp = \gamma p \rho^{-\gamma-1}d\rho \Rightarrow dp = \gamma\frac{p}{\rho}d\rho.$$



Ricordiamo che per un gas biatomico (come l'aria):

$$c_v = \frac{5}{2}R, \quad c_p = \frac{7}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5} = 1.4.$$

Vediamo quindi il significato fisico del numero di Mach. In generale si distinguono i regimi di flusso in base ad esso (subsonico, transonico ...), come vedremo piú avanti. Inoltre M é legato alla comprimibilitá. In funzione di esso possono infatti sussistere condizioni di moto che permettono di considerare il fluido incomprimibile. Dalla definizione di velocitá del suono abbiamo infatti:

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{S=ost.} \Rightarrow \Delta p \sim \frac{\Delta\rho}{a^2}$$ ← rapporto tra gli ordini di grandezza di p e ρ