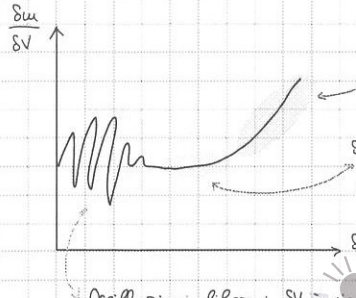
Solido ha forma e volume propri, le molecole sono disposte in strutture geometriche precise e congiunte

Liquido ha volume proprio ma non forma; le molecole sono in gruppi ordinati che possono muoversi uno rispetto all'altro

Gas né forma né volume propri; le molecole sono libere di muoversi senza interagire a grandi distanze

FLUIDO (gas/liquidi) sostanza che, sottoposta a forze tangenziali anche minime, si deforma continuamente

Ipotesi di mezzo continuo si descrive macroscopicamente il moto senza guardare la struttura molecolare



Crescente perché δV non è più puntiforme e risente delle variazioni a livello macroscopico

$\delta m/\delta V$ = costante perché δV è ancora puntiforme ma contiene abbastanza molecole da non far variare $\delta m/\delta V$ cambiando δV

Oscillazioni libere: δV è piccolo quindi variandolo cambia il n° di molecole all'interno e di conseguenza anche $\delta m/\delta V$

L'ipotesi di mezzo continuo è valida se esiste una zona con $\delta m/\delta V$ = cost (cioè se il fluido è abbastanza denso)

PARTICELLA FLUIDA δV appartenente alla zona $\delta m/\delta V$ = cost : è ancora considerabile puntiforme ma contiene un n° di molecole per cui non variano le medie delle grandezze variando di poco δV

Densità $\rho(P) = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$ $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ ⇒ **Volume specifico** $v_s = \frac{1}{\rho}$ $\left(\frac{m^3}{kg}\right)$

$K_{H_2O} = 5 \cdot 10^{-7}$ $1/Pa$

$K_{ARIA} = 10^{-3} \div 10^{-4}$ $1/Pa$

Comprimibilità quanto varia la densità dopo una variazione di volume

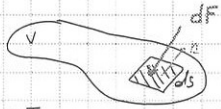
Fattore di comprimibilità (a T costante oppure s costante) $K = -\frac{1}{v_s}\left(\frac{\delta v_s}{\delta P}\right)$ $\left(\frac{1}{Pa}\right)$

- K alto ⇒ fluido comprimibile ⇒ $\rho(\vec{x}, t)$
- K basso ⇒ fluido incomprimibile ⇒ ρ = cost

Forze agenti sul fluido

- **FORZE DI VOLUME/MASSA** agiscono sulla particella fluida a causa di campi gravitazionali quindi non importa se il fluido è a contatto con una parete oppure con altro fluido ⇒ forze NOTE
- **FORZE DI CONTATTO** agiscono sulla superficie della particella fluida e dipendono dal moto ⇒ INCOGNITE

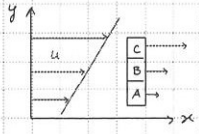
① Forze normali $dF = -P\underline{n}\,dS$ (pressione $\left(\frac{N}{m^2} = Pa\right)$; $\underline{n}$ normale uscente da dS)



$R_{ARIA} = 287 \frac{m^2}{s^2 K}$

La pressione è variabile termodinamica → gas perfetti $P = \rho R T$ con $R = \frac{\mathcal{R}}{mm}$ ($\mathcal{R}$ costante universale gas; mm massa molecolare)

② Forze tangenziali: esempio semplificato con gas che si muove solo lungo x con velocità che varia solo su y



$u_C(t) > u_B(t) > u_A(t)$

La velocità delle particelle è la media delle velocità delle molecole al loro interno. Durante il moto si verifica uno scambio di quantità di moto: le molecole che da A vanno in B tendono a rallentare B perché hanno velocità minore e viceversa: si creano delle forze di contatto tangenziali sulla superficie che tendono a invertire il moto delle particelle a cui sono applicate

Sforzo tangenziale $\tau = f\left(\frac{du}{dy}, T\right)$ $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

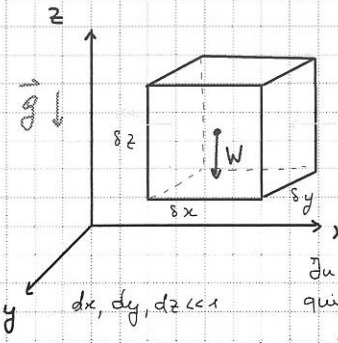
↳ f è PROPRIETÀ COSTITUTIVA del fluido

FLUIDO NEWTONIANO se f è lineare in $\frac{du}{dy}$: $\tau = \mu(T)\frac{du}{dy}$

Coefficiente di viscosità molecolare

- $\mu(T) \propto \sqrt{T}$ → gas perfetti $\left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)$
- $\mu(T)$ decresce con T → liquidi

Statica dei fluidi



Impongo l'equilibrio sulle facce

$$\begin{cases} x: & P(x)\delta y\delta z - P(x+\delta x)\delta y\delta z = 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = P(x+\delta x) \\ y: & P(y)\delta x\delta z - P(y+\delta y)\delta x\delta z = 0 \quad \Rightarrow \quad P(y) = P(y+\delta y) \\ z: & P(z)\delta x\delta y - P(z+\delta z)\delta x\delta y - \rho\delta x\delta y\delta z g = 0 \quad \Rightarrow \quad P(z+\delta z) = P(z) - \rho g\, dz \end{cases}$$

$dx, dy, dz \ll 1$

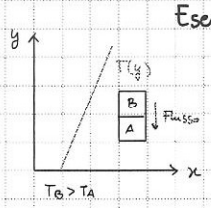
In condizioni statiche la pressione è costante nelle facce perpendicolari alla forza di gravità, quindi la pressione cambia in direzione di $\vec{g}$

FL. INCOMPRIMIBILE ($\rho = cost$) ⇒ Legge di Stevino $P(z_2) = P(z_1) - \rho g (z_2 - z_1)$

FL. COMPRIMIBILE ($\rho \neq cost$) ⇒ $P(z_2) = P(z_1) - g\int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$

Flusso di calore

Esempio semplificato



T varia solo con y

Analogamente alla creazione delle forze tangenziali, si crea FLUSSO DI CALORE dalla particella più calda a quella più fredda

Flusso di calore per unità di sup $q(y) = f\left(\frac{dT}{dy}, T\right)$

LEGGE DI FOURIER $q(y) = -k(T)\frac{dT}{dy}$

Coefficiente di conducibilità termica $\left(\frac{J}{msK}\right)$ $\begin{cases} k(T) \propto \sqrt{T} & \text{gas perfetti} \\ k(T) \text{ decr. con } T & \text{per liquidi} \end{cases}$

Generalizzazione

$T(x,y,z,t)$ varia in tutte le direzioni quindi si crea un flusso di calore in 3 direzioni ⇒ $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$

Applico la legge di Fourier in ogni direzione tenendo conto del gradiente di T e assumendo che $k(T)$ sia la stessa in ogni direzione

$$\begin{cases} q_x = -k(T)\frac{dT}{dx} \\ q_y = -k(T)\frac{dT}{dy} \\ q_z = -k(T)\frac{dT}{dz} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{q} = -k(T)\nabla T$$

Numero di Mach

NUMERO DI MACH $M = \frac{\|\vec{v}(x,y,z,t)\|}{a(x,y,z,t)}$ (adimensionale)

VELOCITÀ DEL SUONO $a^2 = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho}\right)_{s=cost}$

Gas perfetti Legge isoentropica $P\rho^{-\gamma} = cost \Rightarrow P = cost\,\rho^{\gamma} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho}\right)_{s=cost} = cost\,\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{P}{\rho^{\gamma}}\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{P}{\rho}$

Equazione di stato $P = \rho RT \Rightarrow \frac{P}{\rho} = RT$

$\Rightarrow a^2 = \gamma\frac{P}{\rho} = \gamma RT \Rightarrow a = \sqrt{\gamma RT}$ γ e R sono costanti, quindi per i gas perfetti la velocità del suono dipende solo da T come $\sqrt{T}$

Il n° di Mach mi dica $\begin{cases} \text{regime del moto} \\ \text{condizioni in cui un gas è considerabile incomprimibile} \end{cases}$

Analisi ordini di grandezza

$$\begin{cases} a^2 = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho}\right)_{s=cost} \longrightarrow \Delta P \sim a^2 \Delta\rho \\ P + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost \longrightarrow \Delta P \sim \frac{1}{2}\rho v^2 \end{cases} \Rightarrow a^2\Delta\rho \sim \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{a^2}\frac{1}{2} \sim \frac{1}{2}M^2 \Rightarrow M \ll 1 \text{ allora } \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$$

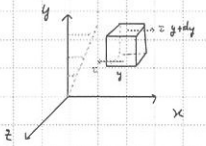
(tra Bernoulli)

Ipotesi di flusso incomprimibile $M \leq 0{,}3$

Avendo introdotto il n° di Mach, l'incomprimibilità non è più una caratteristica intrinseca del fluido ma si parla di flusso

Numero di Reynolds

È il rapporto tra l'ordine di grandezza delle forze inerziali e di quelle viscose $\left(\frac{\text{f. inerziali}}{\text{f. viscose}}\right)$



Esempio semplificato

FORZE VISCOSE

- Risultante $\tau(y+dy)\,\delta x\delta z - \tau(y)\,\delta x\delta z$
- Sviluppo in serie di Taylor $\tau(y+dy) = \tau(y) + \frac{d\tau}{dy}\delta y + \cancel{\delta(\delta y^2)}$ (termini di 2° ordine)
- Sostituisco nella risultante $\left(\cancel{\tau(y)} + \frac{d\tau}{dy}\delta y\right)\delta x\delta z - \cancel{\tau(y)\delta x\delta z}$
- Risultante per unità di volume $\frac{d\tau}{dy}\frac{\delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z} = \frac{d\tau}{dy}$
- Fluido Newtoniano $\tau = \mu(T)\frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\mu(T)\frac{du}{dy}\right)$
- Ordine di grandezza $O\left(\frac{d}{dy}\left(\mu(T)\frac{du}{dy}\right)\right) \sim \mu\frac{v}{L^2}$ (ordine di grandezza gradiente)

FORZE INERZIALI

- Risultante $\rho\,\delta x\delta y\delta z\frac{du}{dt}$ (massa per accelerazione)
- Risultante per unità di volume $\rho\frac{du}{dt} = \rho\frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} = \rho u\frac{du}{dx}$
- Ordine di grandezza $O\left(\rho u\frac{du}{dx}\right) \sim \rho\frac{v^2}{L}$



NUMERO DI REYNOLDS $\dfrac{\rho\frac{v^2}{L}}{\mu\frac{v}{L^2}} = \frac{\rho v^2}{\mu}\cdot\frac{L^2}{v} = \frac{\rho vL}{\mu} \Rightarrow Re = \frac{\rho vL}{\mu}$

- $Re \gg 1 \Rightarrow$ ordine f. inerziali $\gg$ ordine f. viscose
- $Re \ll 1 \Rightarrow$ " f. inerziali $\ll$ " f. viscose

Viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{m^2}{s}\right) \Rightarrow Re = \frac{vL}{\nu}$

Il n° di Reynolds
- mi dice quanto sono importanti le forze viscose rispetto a quelle inerziali
- rappresenta rapporto ordini di grandezza termini convettivi e viscosi nell'equazione della dinamica della vorticità



Atmosfera standard

Ipotesi

1) Aria secca di composizione chimica fissa (78% azoto, 21% ossigeno, 1% altri gas)
2) Legge di variazione della pressione Legge di Stevino $dP = -\rho(z)g(z)\,dz$
3) Legge di variazione dell'accelerazione di gravità con la quota (raggio terrestre) $g(z) = g(0)\left(\frac{R_0}{R_0+z}\right)^2 \Rightarrow g(z) \simeq g(0)$
   L'approssimazione è ragionevole perché $z \ll R_0$
   $g(0) = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$
4) L'aria è un gas perfetto $P = \rho RT$
5) Variazione della temperatura con la quota
   - $dT = -0{,}0065\,dz$ se $z \le 11\,000$ m
   - $dT = 0$ se $z > 11\,000$ m



Sistema di 4 equazioni in 5 incognite (z, T, ρ, P, g) che si possono esprimere in funzione di z

ATMOSFERA STANDARD A $z = 0$

- $P(0) = 1$ atm $= 101\,325\ N/mm^2$
- $\rho(0) = 1{,}225\ kg/m^3$
- $T(0) = 15°C = 288{,}15\ K$
- $a(0) = 340{,}3\ m/s$ (velocità suono)
- $\mu(0) = 1{,}789\cdot10^{-5}\ kg/m\,s$
- $\nu(0) = 1{,}46\cdot10^{-5}\ m^2/s$

Tutte le grandezze diminuiscono con z tranne ν che aumenta

- Velocità del suono $a(z) = \sqrt{\gamma RT(z)}$ $\Rightarrow$ diminuisce con z
- Viscosità molecolare $\mu(T) \propto \sqrt{T(z)}$ $\Rightarrow$ diminuisce con z
- Viscosità cinematica $\nu(z) = \frac{\mu(z)}{\rho(z)}$ $\Rightarrow$ aumenta con z perché ρ diminuisce più velocemente di μ

Legge di Sutherland $\dfrac{\mu(T)}{\mu(T_0)} = \left(\frac{110+T_0}{110+T}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}$

Cinematica dei fluidi

• DESCRIZIONE LAGRANGIANA descrive la variazione delle grandezze fluidodinamiche nel tempo guardando il moto lungo la traiettoria delle particelle fluide (es. $\vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$)

PRO: grandezze associate alla particella quindi i principi della meccanica dei fluidi si applicano sempre alle stesse particelle, quindi la descrizione del moto è la più fisicamente naturale

CONTRO: c'è quasi sempre dipendenza dal tempo e la descrizione del moto è molto complicata

• DESCRIZIONE EULERIANA descrive la variazione delle grandezze fluidodinamiche nel tempo in punti fissi dello spazio (es $\vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$)

PRO: Descrizione del moto più semplice, in alcuni casi non c'è dipendenza dal tempo

CONTRO: Sempre manipolazioni matematiche per esprimere grandezze lagrangiane in termini euleriani

DERIVATA MATERIALE variazione nell'unità di tempo di una grandezza fluidodinamica calcolata seguendo la particella (lagrangiano)

- Scalare $A(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \Rightarrow \frac{DA}{Dt} = \frac{\delta A}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta A}{\delta x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\delta A}{\delta x_3}\frac{dx_3}{dt} + \frac{\delta A}{\delta t} = \frac{\delta A}{\delta x_1}u_1 + \frac{\delta A}{\delta x_2}u_2 + \frac{\delta A}{\delta x_3}u_3 + \frac{\delta A}{\delta t} = \frac{\delta A}{\delta t} + \vec{v}\cdot\nabla A$

$\frac{DA}{Dt} = \underbrace{\frac{\delta A}{\delta t}}_{\text{Termine euleriano}} + \underbrace{\vec{v}\cdot\nabla A}_{\text{Termine convettivo}}$ esprime la variazione di A nel tempo dovuta al moto della particella ($\vec{v}$) in uno spazio in cui A varia da punto a punto: tiene cioè conto del moto della particella

- Vettoriale $\vec{A} = (A_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t), A_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t), A_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)) \Rightarrow$ applico la formula scalare a ogni componente $\frac{DA_i}{Dt} = \frac{\delta A_i}{\delta t} + \vec{v}\cdot\nabla A_i \Rightarrow \frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{A}$

FLUSSO STAZIONARIO Si ha quando A non dipende dal tempo in punti fissi dello spazio, quindi si annulla il termine euleriano: $\frac{\delta \cdot}{\delta t} = 0$

TRAIETTORIA

luogo geometrico dei punti occupati da una particella al variare del tempo

Determinazione analitica

$\vec{v} = (u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

$\begin{cases} dx = u(x(t), y(t), z(t), t)\,dt \\ dy = v(x(t), y(t), z(t), t)\,dt \\ dz = w(x(t), y(t), z(t), t)\,dt \end{cases}$ ⇒ integro

$\begin{cases} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} u(x(t), y(t), z(t), t)\,dt \\ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} v(x(t), y(t), z(t), t)\,dt \\ z(t) - z_0 = \int_{t_0}^{t} w(x(t), y(t), z(t), t)\,dt \end{cases}$

LINEE DI CORRENTE

linea tangente in ogni suo punto al vettore velocità al tempo $\bar{t}$

Determinazione analitica

$d\vec{s} = (dx, dy, dz) \Rightarrow d\vec{s} \parallel \vec{v}$ per definizione

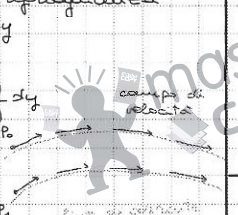
$\vec{v} = (u(x, y, z, \bar{t}), v(x, y, z, \bar{t}), w(x, y, z, \bar{t}))$

$\frac{dx}{u(x,y,z,\bar{t})} = \frac{dy}{v(x,y,z,\bar{t})} = \frac{dz}{w(x,y,z,\bar{t})}$ Condizione di parallelismo

Integro due termini dell'uguaglianza

$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{y_0}^{y} \frac{u}{v}\,dy$

$\begin{cases} x(t) - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{u(x, y, z, \bar{t})}{v(x, y, z, \bar{t})}\,dy \\ y(t) - y_0 = \text{analogo} \\ z(t) - z_0 = \text{analogo} \end{cases}$



LINEE DI FUMO

luogo dei punti occupati a $t > t_0$ dalle particelle che a $t > t_0$ sono passate da P_0 (punto in cui ad t_0 inserisco fumo)

Concetto intermedio tra euleriano e lagrangiano perché:

- particelle si muovono lungo la loro traiettoria (L)
- linea di fumo definita a un certo istante preciso (concetto istantaneo)



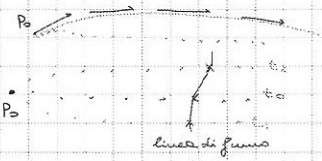
In generale traiettoria, linee di fumo e linee di corrente coincidono solo nel flusso stazionario

• FLUSSO NON STAZIONARIO

1) Traiettoria ≠ linea di corrente — Coincidono in un primo momento perché particella ha velocità tangente a linea di corrente ma poi cambia direzione

2) Traiettoria ≠ linea di fumo

3) Linea di fumo ≠ linea di corrente per proprietà transitiva



• FLUSSO STAZIONARIO

1) Traiettoria = linea di corrente — campo di velocità non cambia nel tempo, quindi linee di corrente sono le stesse a ogni t

2) Traiettoria = linea di fumo — Tutte le particelle che passano per P_0 a $t > t_0$ seguono la stessa traiettoria

3) L. di fumo = L. di corrente per proprietà transitiva





Dinamica dei fluidi

Volume materiale $\mathcal{V}(t)$ volume che contiene sempre le stesse particelle fluide a cui si applicano i principi di meccanica dei fluidi
↳ si sposta e deforma nel tempo

Teorema del trasporto trasformazione matematica che mappa il volume materiale a quel t in una configurazione fissa $\mathcal{V}^*$

$P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \in \mathcal{V}(t)$
$P^* = (X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{V}^*$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} \delta x_1/\delta X_1 & \delta x_1/\delta X_2 & \delta x_1/\delta X_3 \\ \delta x_2/\delta X_1 & \delta x_2/\delta X_2 & \delta x_2/\delta X_3 \\ \delta x_3/\delta X_1 & \delta x_3/\delta X_2 & \delta x_3/\delta X_3 \end{pmatrix} \Rightarrow J = \det T \Rightarrow d\mathcal{V} = J\, d\mathcal{V}^*$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)} G(x_1,x_2,x_3,t)\,d\mathcal{V} \xrightarrow{\text{cambio di variabile}} \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}^*} G(X_1,X_2,X_3)\,J\,d\mathcal{V}^* = \int_{\mathcal{V}^*}\frac{D}{Dt}\left(G(X_1,X_2,X_3)\,J\right)d\mathcal{V}^* = \int_{\mathcal{V}^*} J\,\frac{DG}{Dt}(X_1,X_2,X_3) + \frac{DJ}{Dt}\,G(X_1,X_2,X_3)\,d\mathcal{V}^* =$$

$\frac{DJ}{Dt} = J\,\mathrm{div}\,\vec{v}$

$$= \int_{\mathcal{V}^*} J\,\frac{DG}{Dt}(X_1,X_2,X_3) + G(X_1,X_2,X_3)\,J\,\mathrm{div}\,\vec{v}\;d\mathcal{V}^* = \int_{\mathcal{V}^*} J\,d\mathcal{V}^*\left(\frac{DG}{Dt}(X_1,X_2,X_3) + G(X_1,X_2,X_3)\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{DG}{Dt}(x_1,x_2,x_3,t) + G(x_1,x_2,x_3,t)\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} \quad \#$$

operatore lagrangiano — operatore euleriano

FORMA MISTA CONSERVATIVA TEO. TRASPORTO $\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)} G\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{DG}{Dt} + G\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V}$ → per ottenere la forma euleriana devo esprimere la derivata materiale in termini euleriani

FORMA EULERIANA CONSERVATIVA TEO. TRASPORTO

$\mathrm{div}(G\vec{v}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\delta(Gu_i)}{\delta x_i} = \sum_{i=1}^{3}\left[G\frac{\delta u_i}{\delta x_i} + u_i\frac{\delta G}{\delta x_i}\right] = G\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \sum_{i=1}^{3} u_i(\nabla G)_i$ (la $\vec{v}\cdot\nabla G$)

- **Grandezza scalare** $\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)} G\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{\delta G}{\delta t} + \mathrm{div}(G\vec{v})\,d\mathcal{V}$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)} G\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{DG}{Dt} + G\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{\delta G}{\delta t} + \vec{v}\cdot\nabla G + G\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} \quad \#$$

$\mathrm{div}(G\vec{v})$

- **Grandezza vettoriale** $\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\vec{G}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{\delta\vec{G}}{\delta t} + \mathrm{div}(\vec{v}\,\vec{G})\,d\mathcal{V}$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\vec{G}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{D\vec{G}}{Dt} + \vec{G}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{\delta\vec{G}}{\delta t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{G} + \vec{G}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} \quad \#$$

$\mathrm{div}(\vec{a}\,\vec{v})$

proprietà divergenza — tensore diadico: $\mathrm{div}(\vec{a}\otimes\vec{b}) = \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{b}$

FORMA NON CONSERVATIVA TEO. TRASPORTO **Ipotesi** $G = \rho F$ (F scalare o vettoriale) $\Rightarrow \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\rho F\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\rho\frac{DF}{Dt}\,d\mathcal{V}$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\rho F\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{D}{Dt}(\rho F) + \rho F\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} F\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{DF}{Dt} + \rho F\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} F\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) + \rho\frac{DF}{Dt}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\rho\frac{DF}{Dt}\,d\mathcal{V}$$

↳ ho usato bilancio di massa #

Bilancio di massa

Per il principio di conservazione della massa la massa di un volume materiale si conserva nel tempo $\Rightarrow \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\rho\,d\mathcal{V} = 0$

F. MISTA $\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\rho\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\mathcal{V} = 0 \xrightarrow{\text{lemma loc.}} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

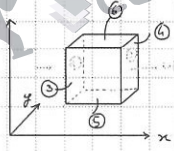
F. EULERIANA $\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)}\rho\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)}\frac{\delta\rho}{\delta t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v})\,d\mathcal{V} = 0 \xrightarrow{\text{lemma loc.}} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$

Nel bilancio di massa $\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V} = 0$ è sempre vera perché gli integrali sono nulli $\forall\mathcal{V}$, mentre non sempre ρ è continua dato che esistono soluzioni discontinue come onde d'urto

Lemma di localizzazione Dato $\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V}$ se $\begin{cases}\rho \text{ continua} \\ \int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V} = 0\ \forall\mathcal{V}\end{cases} \Rightarrow \rho \equiv 0$

La formulazione integrale dei bilanci vale per tutte le soluzioni mentre applicando il lemma di localizzazione e passando quindi alla formulazione differenziale si perdono le soluzioni discontinue ⇒ anche quando uso la forma non conservativa perdo le soluzioni discontinue avendo usato la formulazione differenziale del bilancio di massa

SIGNIFICATO FISICO DI $\mathrm{div}\,\vec{v}$ $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow -\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$



① $t: x \to u(x) \Rightarrow$ spostamento $u(x)\,dt$
② $t: x+\delta x \to u(x+\delta x) \Rightarrow$ spostamento $u(x+\delta x)\,dt$
$\Rightarrow \Delta x = \left(u(x+\delta x) - u(x)\right)dt$

$\delta x, \delta y, \delta z \ll 1$
Considero solo le componenti di velocità perpendicolari alle facce
↳ le componenti parallele non contribuiscono alla variazione di volume al primo ordine

Analogamente per le facce 3-4 e 5-6 si ha $\Delta y = \left(v(y+\delta y) - v(y)\right)dt$, $\Delta z = \left(w(z+\delta z) - w(z)\right)dt$

Sviluppo in serie di Taylor al primo ordine delle velocità: $u(x+\delta x) = u(x) + \frac{\delta u}{\delta x}\delta x$, $v(y+\delta y) = v(y) + \frac{\delta v}{\delta y}\delta y$, $w(z+\delta z) = w(z) + \frac{\delta w}{\delta z}\delta z$

Sostituisco nelle espressioni di $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: $\Delta x = \left(u(x) + \frac{\delta u}{\delta x}\delta x - u(x)\right)dt = \frac{\delta u}{\delta x}\delta x\,dt$, $\Delta y = \frac{\delta v}{\delta y}\delta y\,dt$, $\Delta z = \frac{\delta w}{\delta z}\delta z\,dt$

Volume $\mathcal{V}(t) = \delta x\delta y\delta z$, $\mathcal{V}(t+dt) = (\delta x+\Delta x)(\delta y+\Delta y)(\delta z+\Delta z)$ — generalizzato perché $\delta x, \delta y, \delta z \ll 1$

$\Rightarrow \Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}(t+dt) - \mathcal{V}(t)$ e approssimo l'espressione al 1° ordine (0°) ottenendo $\Delta\mathcal{V} = \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}\right)\delta x\delta y\delta z\,dt = \mathcal{V}(t)\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,dt$

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}(t)dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$ $\begin{cases}\mathrm{div}\,\vec{v} > 0 \Rightarrow \Delta\mathcal{V} > 0 \Rightarrow \rho \text{ diminuisce} \\ \mathrm{div}\,\vec{v} < 0 \Rightarrow \Delta\mathcal{V} < 0 \Rightarrow \rho \text{ aumenta}\end{cases}$ ⇒ $\mathrm{div}\,\vec{v}$ è variazione di volume in dt per unità di volume e di tempo