LA TEORIA DELLO STRATO LIMITE:

TEORIA DELLO STRATO LIMITE DI PRANDTL (1905): Per Re elevati e corpi di forma opportuna esiste uno strato sottile intorno al corpo in cui i termini viscosi sono importanti e fa sì che si passi da una velocità tipica di un flusso NON VISCOSO a $\vec{V}=0$ sul corpo (condizione di aderenza) a questo strato venne dato il nome di STRATO LIMITE.

Dato che $\vec{\omega}=0 \Leftrightarrow$ FLUSSO NON VISCOSO allora lo STRATO LIMITOSO cioè nel quale $\vec{\omega}\neq 0$ corrisponde con lo strato limite. Questo ci permette, usando la teoria, di semplificare le eq. di Navier-Stokes dentro lo strato limite.

master COPY

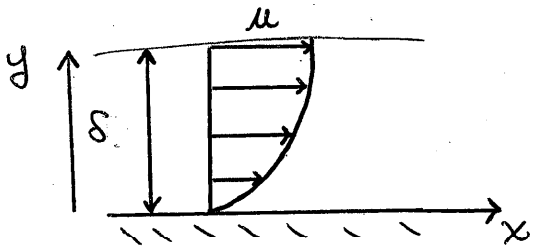
Semplificazione delle equazioni del moto dentro lo strato limite:

Tramite un'analisi di ordini di grandezza dei vari termini delle equazioni del moto si arriva a delle semplificazioni significative delle equazioni stesse;

L'ipotesi fondamentale è che: $\frac{\delta}{L} \ll 1$ e $\vec{f}=0$

$L \longrightarrow$ Dimensione longitudinale tipica (es: lunghezza del corpo)

Consideriamo inizialmente un flusso incomprimibile 2D su una parete rettilinea (lastra piana ad incidenza nulla)



- $\vec{V}=(u,v,0)$
- L'ordine di grandezza dei termini viscosi nell'equazione del moto è uguale a quello dei termini convettivi.

- EQUAZIONE DI BILANCIO DI MASSA:

$$\text{div}\,\vec{V}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

master COPY
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- EQUAZIONE DI BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO:

Direzione x $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Direzione y $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

Adesso analizziamo gli ordini di grandezza:

$[u] \simeq U$ → ORDINE DI GRANDEZZA DI u

$[v] \simeq V$ → ORDINE DI GRANDEZZA DI v

$[x] \simeq L$ → ORDINE DI GRANDEZZA DELLE LUNGHEZZE LUNGO x

$[y] \simeq \delta$ → ORDINE DI GRANDEZZA DELLE LUNGHEZZE LUNGO y

quindi:

- Dal bilancio di massa vediamo che $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] \simeq \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]$ perché la loro somma deve fare zero quindi otteniamo che:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] \simeq \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{U}{L} \simeq \frac{V}{\delta} \Rightarrow V \simeq U\frac{\delta}{L} \Rightarrow V \ll U \Rightarrow v \ll u$$

$\frac{\delta}{L} \ll 1$

CONCLUSIONE: NELLO STRATO LIMITE LA COMPONENTE NORMALE DELLA VELOCITÀ È TRASCURABILE RISPETTO A QUELLA TANGENZIALE.

- Dal bilancio di quantità di moto in direzione x abbiamo che:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

▲ $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \simeq \frac{U}{T}$ con $T \simeq \frac{L}{U}$ $\Rightarrow \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{U^2}{L}$

▲ $\left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right] \simeq \frac{U^2}{L}$

▲ $\left[v\frac{\partial u}{\partial y}\right] \simeq V\frac{U}{\delta} \simeq \frac{U\delta}{L}\cdot\frac{U}{\delta} = \frac{U^2}{L}$

▲ $\left[\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] = \frac{U^2}{L}$

$\frac{U}{L^2} \ll \frac{U}{\delta^2}$ TRASCURABILE

perché per la ipotesi di strato limite l'ordine di grandezza dei termini convettivi è uguale a quello dei termini viscosi.

▲ $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right] \leq \frac{U^2}{L}$ Il termine di pressione può avere al massimo ordine di grandezza U^2/L perché se fosse più grande non sarebbe rispettato il bilancio.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Dal bilancio di quantità di moto in direzione y abbiamo che:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

- $\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] \simeq \frac{V}{T} \simeq \frac{U\delta}{L}\cdot\frac{U}{L} \simeq \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$
- $\left[u\frac{\partial v}{\partial x}\right] \simeq \frac{UV}{L} \simeq \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$
- $\left[v\frac{\partial v}{\partial y}\right] \simeq \frac{V^2}{\delta} \simeq \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$
- $\left[\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \simeq \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$
- $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right] \leq \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$ per lo stesso motivo di prima

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Conclusione: L'equazione di bilancio di quantità di moto in direzione y ha tutti i termini $\ll$ di quelli in direzione x quindi può essere trascurata, e viene SOSTITUITA da:

RISULTATO FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELLO STRATO LIMITE → $\frac{\partial p}{\partial y} \simeq 0$

NELLO STRATO LIMITE LA VARIAZIONE DI PRESSIONE IN DIREZIONE NORMALE ALLA PARETE È TRASCURABILE RISPETTO A QUELLA IN DIREZIONE LONGITUDINALE

Questo è il risultato fondamentale della teoria dello strato limite in quanto mi permette di ottenere la pressione in ogni punto sul corpo, tramite una semplice proiezione in direzione normale alla parete, una volta nota la pressione al bordo dello strato limite. Cioè ho che:

$$\forall x \quad p(x,y) = \text{PRESSIONE SUL CORPO} = p^e(x) = \text{PRESSIONE AL BORDO DELLO STRATO LIMITE CHE LA OTTENGO RISOLVENDO LE EQUAZIONI PER FLUSSO IRROTAZIONALE}$$

Riassumendo le equazioni dello strato limite per un flusso incomprimibile 2D su una parete rettilinea sono:

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

↓

Per ottenerla ho sfruttato $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

Adesso dato che la pressione la ricavo dalle equazioni di flusso irrotazionale questa NON è più un incognita e come incognite mi rimangono solo u e v.
per ricavarle mi basta risolvere le equazioni scritte sopra aggiungendovi le condizioni al contorno:

1) Alla parete: $u = v = 0$ se $y = 0$

2) Al bordo dello strato limite: → $\vec{v} = \vec{v}^e(x)$ se $y = \delta$

↳ oppure

$\vec{\omega}(x, \delta) = 0$ con $\vec{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \simeq -\frac{\partial u}{\partial y}$

($\frac{v}{L} \ll \frac{U}{\delta}$)

⇕ equivalente a:

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ se $y = \delta$

L'ultima cosa che rimane da ottenere è lo SFORZO DI TAGLIO ALLA PARETE

$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)$ lo sforzo di taglio alla parete è proporzionale alla derivata $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$

($\frac{U}{\delta} \gg \frac{V}{L}$)

cioè $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$ e dipende dal profilo di velocità alla parete.

La risoluzione numerica delle equazioni di strato limite implica costi computazionali di circa un ordine di grandezza più elevati di quelli necessari per risolvere l'equazione di Laplace per flussi irrotazionali, ma ancora notevolmente inferiori a quelli richiesti dalla discretizzazione delle equazioni complete del moto.

<u>Come si definisce matematicamente $\delta(x)$ = spessore di strato limite?</u>

Definizioni convenzionali:

1) Distanza dalla parete in cui è contenuta il 99% della velocità a quella sezione cioè a x data.

2) Distanza dalla parete a cui la velocità tangenziale raggiunge il 99% della velocità del flusso potenziale $u^e(x)$.

Tuttavia esistono e sono utili delle definizioni diverse come:

- SPESSORE DI SPOSTAMENTO $$\delta^*(x) = \int_0^{\delta(x)} \left[1 - \frac{u(x,y)}{u^e(x)}\right] dy$$

per cercare di capire cosa significa la rielaboriamo:

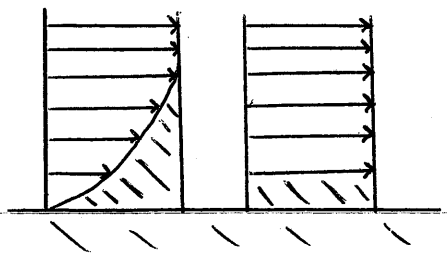
$$u^e(x)\delta^*(x) = \int_0^{\delta(x)} \left[u^e(x) - u(x,y)\right] dy = \int_0^{\delta(x)} u^e(x)\,dy - \int_0^{\delta(x)} u(x,y)\,dy =$$

$$= u^e(x)\delta(x) - \int_0^{\delta(x)} u(x,y)\,dy$$

quindi ho ottenuto $\Rightarrow$ $$\int_0^{\delta(x)} u(x,y)\,dy = u^e(x)\left(\delta(x) - \delta^*(x)\right)$$

che moltiplicato per ρ $\Rightarrow$ $$\underbrace{\int_0^{\delta(x)} \rho\, u(x,y)\,dy}_{\text{PORTATA MASSICA ATTRAVERSO LA SEZIONE DELLO STRATO LIMITE}} = \underbrace{\rho\, u^e(x)\left(\delta(x) - \delta^*(x)\right)}_{\text{PORTATA MASSICA CHE AVREI CON } V = u^e \text{ FRA } \delta^* \text{ e } \delta}$$

* AREE UGUALI



quindi da questa relazione emerge il significato fisico dello SPESSORE DI SPOSTAMENTO.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745