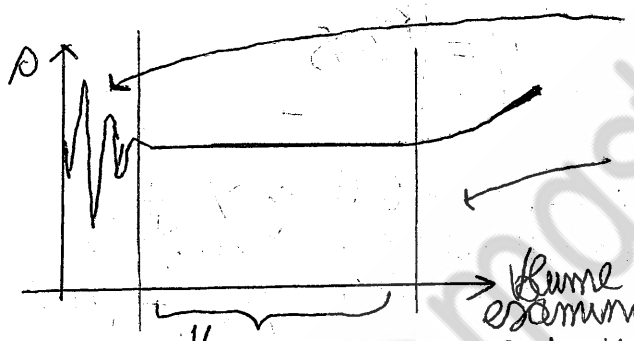
Fluidodinamica

- Hp di mezzo continuo (particella fluida): volumetto elementare di fluido $\delta V'$ sufficientemente piccolo da poter essere considerato puntiforme rispetto alle variazioni delle grandezze macroscopiche ma abbastanza grande da poter contenere un numero di molecole abbastanza elevato da far sì che il valore di ogni grandezza risulti staticamente stazionario

- Mezzo Continuo: il comportamento macroscopico del fluido può essere raccontato senza tenere conto del moto delle singole molecole.

- Densità $\rho = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$



valore ottimale per il volumetto dell'ipotesi di mezzo continuo in cui la densità è costante

$\delta V' = 10^{-12}\ cm^3$ (cubo di lato 10^{-3} mm) contiene $2{,}7 \cdot 10^7$ molecole

- Comprimibilità

$$K = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right) \qquad V = 1/\rho \text{ volume specifico}$$

Variazione relativa di volume per unità di variazione di pressione

I liquidi K basso, poco comprimibili $\rho = cost$
I gas K elevato, comprimibili

- Equazione di stato

$$\boxed{P = \rho RT} \qquad R_{aria\ secca} = 287\ J\ m^2/s^2 K$$

- forze di volume: forze proporzionali al volume della particella
- forze di contatto: " dovute al contatto fra particelle

Fluido in quiete: le particelle si scambiano solo forze normali alla superficie di contatto

- Pressione: forza normale per unità di superficie (verso l'interno)

Forze tangenziali

le particelle si scambiano molecole a causa della velocità di agitazione termica delle molecole in esse contenute, in questo modo particelle a velocità diverse si scambiano molecole a velocità diverse che frenano o spingono la particella che le riceve

Fluido Newtoniano

$$\boxed{\tau = \mu \frac{dU}{dy}} \qquad \mu = \left[\frac{kg}{m/s}\right]$$

- azioni tangenziali:
  - aumentano con: - la variazione di U lungo y $\left(\frac{dU}{dy}\right)$
    - T ossia aumenta la velocità di agitazione termica $\mu \propto \sqrt{T}$ (solo gas)

(nei liquidi μ diminuisce con T)

Viscosità cinematica

$$\nu = \mu/\rho \quad \left[m^2/s\right]$$

Trasporto di calore

fenomeno dovuto alla velocità di agitazione termica

- Legge di Fourier $\boxed{q_y = -k \frac{dT}{dy}}$

k aumenta con $\sqrt{T}$ (come per la viscosità)

Caso 3D $\vec{q} = -k \nabla T$

Velocità del suono velocità di propagazione di perturbazioni di pressione all'interno del fluido

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

legge isentropica $P/\rho^{\gamma} = cost$

$$\Rightarrow a^2 = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma R T$$

$$\boxed{a = \sqrt{\gamma R T}}$$

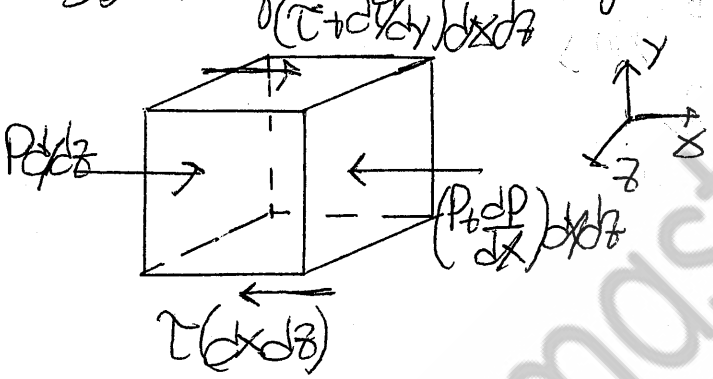
Comprimibilità

$a^2 = \frac{\Delta P}{\Delta \rho}$ $\quad \Delta \rho = \left(\frac{a^2}{\Delta P}\right)^{-1}$ $\quad \Delta P \cong \frac{1}{2}\rho V^2$

$\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \frac{1}{2}\frac{M^2}{a^2}$ $\quad$ Numero di Mach $M = V/a$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \frac{1}{2}M^2}$ flusso incomprimibile se $M < 0{,}3$

Bilancio forze pressione - forze viscose



$P(dydz) - (P + \frac{dP}{dx}dx)(dydz) = -\frac{dP}{dx}dxdydz$

$-\tau dxdz + (\tau + \frac{d\tau}{dy}dy)dxdz = \frac{d\tau}{dy}dxdydz$

inoltre $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ $\rightarrow$ $\mu \frac{d^2u}{dy^2}$

$\boxed{\mu \frac{d^2u}{dy^2}}$ forza viscosa per unità di volume

$\rho a = \rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \boxed{\rho u \frac{du}{dx}}$ forza d'inerzia per unità di volume

Ordini di grandezza

$FV \propto \mu \frac{U}{L^2}$ $\quad FI \propto \rho \frac{U^2}{L}$

$Re = \frac{FI}{FV} = \frac{\rho UL}{\mu}$ Numero di Reynolds $\quad \boxed{Re = \frac{UL}{\nu}}$

master corso RIPETIZIONI 050 388/9837745

- Numero di Prandtl

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{k_H} \qquad k_H = \frac{k}{c_p}$$

k_H: diffusività termica

Pr = diffusione termica dovuta alla viscosità / diffusività termica

μ e $k \propto \sqrt{T}$ quindi Pr è costante

$Pr_{aria} = 0{,}72 \div 0{,}73$

costante - gas
decresce con T - liquidi

- Aria standard (a 15°C - livello del mare)

$\rho = 1{,}225\ kg/m^3$ $\quad \mu = 1{,}78 \cdot 10^{-5}\ kg/m\cdot s$

$a = 340{,}3\ m/s$ $\quad R = 287{,}1\ J/kg\,K$

$\gamma = c_p/c_v = 1{,}4$

Vettori e Tensori

Vettore: grandezza fisica che al variare del sistema di riferimento si trasforma come farebbe un vettore orientato. Le sue componenti sono date da una terna di numeri reali, diversi a seconda del sistema di riferimento, ma cambiati secondo una legge lineare tramite matrice di rotazione.

Tensore: grandezza definita da una matrice 3x3 che cambia col sistema di riferimento seguendo legge di trasformazione precisa.

Traccia di un tensore: somma degli elementi sulla diagonale
⇓
invariante al variare del sistema di riferimento

Operazioni

$\vec{a}, \vec{b}$ vettori, T tensore di ordine 2 $\quad a_i, b_i$ e T_{ij} elementi di vettore e tensore

prodotto scalare

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum a_i b_i = a_i b_i \quad \text{scalare}$$

← abbassa di 1 l'ordine tensoriale

divergenza vettore

$$\mathrm{div}(\vec{a}(x_1,x_2,x_3)) = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad \text{scalare}$$

master COPY COPISTERIA 0577 31 7745

Prodotto interno tra vettore e tensore

- $(\vec{a}\cdot T)_i = \sum_j a_j T_{ij} = a_j T_{ij}$ (tensore)

$$\vec{a}\cdot T = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31} \\ a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32} \\ a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33} \end{pmatrix}$$

- $(T\cdot\vec{a})_i = \sum_j T_{ij}\cdot a_j = T_{ij} a_j$ (tensore)

$$(T\cdot\vec{a}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}\cdot a_1 & T_{12}\cdot a_2 & T_{13}\cdot a_3 \\ T_{21}\cdot a_1 & T_{22}\cdot a_2 & T_{23}\cdot a_3 \\ T_{31}\cdot a_1 & T_{32}\cdot a_2 & T_{33}\cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Abbassa di 1 l'ordine tensoriale

$(T\cdot\vec{a}) = (\vec{a}\cdot T)$ solo se T è simmetrico

Divergenza di un tensore

$$\mathrm{div}(T)_i = \sum_j \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$ (vettore)

$$\mathrm{div}(T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Gradiente di un vettore

$$(\nabla\vec{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$ (tensore)

Aumenta di 1 l'ordine tensoriale

$$\nabla(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Kopy Point Consulenza 050/8312126 388/9837745