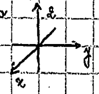
Analisi 2

Riassunto di fondamentali e geometria 3D

Il mondo fisico appare tridimensionale, vale a dire che in ogni punto passano al massimo tre rette mutualmente ortogonali, sono dunque necessari tre numeri per individuare un punto in un sistema di riferimento, convenzionalmente si sceglie un riferimento destrorso

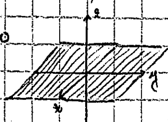


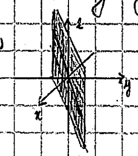
In un siffatto sistema la distanza è evidentemente relazionabile alle coordinate dalla relazione

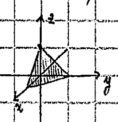
$P=(x,y,z)$

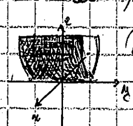
$Q=(a,b,c)$ $\quad d(P,Q)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ $\quad$ con $|\vec{n}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ come distanza dall'origine

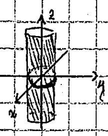
Le equazioni e disequazioni in $\mathbb{R}^3$ determinano luoghi geometrici di punti nello spazio, a titolo di esempio:

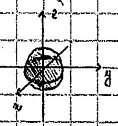
$z=S(x,y)=0$ 

$z=S(x,y)$, $x=y$ 

$x+y+z=1$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 

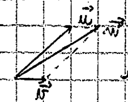
$z=x^2$  Paraboloide

$x^2+y^2=c$ 

$x^2+y^2+z^2=c$ 

Vettori

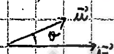
Come noto un vettore è un ente geometrico dotato di direzione intensità e verso, tra vettori vale l'operazione di somma vettoriale tale che

$\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$  esiste per questa operazione $\begin{cases} \underline{0} = \text{elemento nullo} \mid \vec{u}+\underline{0}=\underline{0}+\vec{u}=\vec{u} \\ -\vec{v} = \text{elemento opposto} \mid \vec{v}-\vec{v}=-\vec{v}+\vec{v}=\underline{0} \end{cases}$

L'insieme dei vettori costituisce dunque un gruppo, peraltro la somma è commutativa dunque un gruppo abeliano

Ogni distanza può essere interpretata come modulo del vettore tra i due punti, in particolare quello dall'origine è detto vettore posizione

tra due vettori è possibile operare il prodotto scalare canonico, questo ha una definizione geometrica come segue

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$  il risultato di tale prodotto è uno scalare $\quad P(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$

e ha proprietà: SIMMETRICA $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\quad$ PRODOTTO $(\alpha\vec{v})\cdot\vec{u}=\alpha(\vec{v}\cdot\vec{u})$

BILINEARE $\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{cases}$

scomponendo i due vettori si ha che:

$\vec{u}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$\vec{v}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=xa(\hat{i}\cdot\hat{i})+xb(\hat{i}\cdot\hat{j})+xc(\hat{j}\cdot\hat{k})+ya(\hat{j}\cdot\hat{i})+yb(\hat{j}\cdot\hat{j})+yc(\hat{j}\cdot\hat{k})+za(\hat{k}\cdot\hat{i})+zb(\hat{k}\cdot\hat{j})+zc(\hat{k}\cdot\hat{k})$

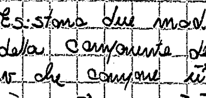
tutti i prodotti scalari di vettori ortogonali sono nulli, tutti quelli di due identici versori valgono 1 dunque

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z$ $\quad$ Prodotto scalare canonico

Il prodotto scalare è comunemente usato per stabilire l'ortogonalità tra due vettori (e ad es rette associate) e per calcolare l'angolo tra essi $\quad \cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Proiezioni

Esistono due modi di proiettare un vettore $\vec{u}$ lungo una retta con generatore $\vec{v}$, l'una fornisce il valore scalare della componente del vettore $\vec{u}$ lungo la retta (proiezione scalare) l'altra produce il vettore lungo la retta r che compone $\vec{u}$ (proiezione vettoriale)



PROIEZ. SCALARE $\rightarrow$ Lunghezza con segno $\quad |\vec{u}|\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=\vec{u}\cdot\hat{v}$

PROIEZ. VETTORIALE $\rightarrow$ Vettore su R $\quad |\vec{u}|\cos\theta\,\hat{v}=(\vec{u}\cdot\hat{v})\hat{v}$

Una ulteriore operazione, definita solo e unicamente per vettori di $\mathbb{R}^3$ è il Prodotto vettoriale

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{cases}|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta\\ \text{direz}(\vec{u}\wedge\vec{v})=\text{ortogonale a entrambi}\end{cases}$ $\quad$ Il risultato è un vettore $\quad P(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3)$

l'operazione ha proprietà: ANTISIMMETRICA $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$ $\quad$ PRODOTTO $(\alpha\vec{v})\wedge(\vec{u})=\alpha(\vec{v}\wedge\vec{u})$

BILINEARE $\quad (\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

dunque scomponendo nuovamente i vettori:

$\vec{u}=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k}$

$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$ $\quad \vec{u}\wedge\vec{v}=u_xv_x(\hat{i}\wedge\hat{i})+u_xv_y(\hat{i}\wedge\hat{j})+u_xv_z(\hat{i}\wedge\hat{k})+u_yv_x(\hat{j}\wedge\hat{i})+u_yv_y(\hat{j}\wedge\hat{j})+u_yv_z(\hat{j}\wedge\hat{k})+$
$+u_zv_x(\hat{k}\wedge\hat{i})+u_zv_y(\hat{k}\wedge\hat{j})+u_zv_z(\hat{k}\wedge\hat{k})$

I prodotti vettoriali di versori identici sono evidentemente nulli, mentre in una base destrorsa

$(\hat{i}\wedge\hat{j}) = -(\hat{j}\wedge\hat{i}) = \hat{k}$
$(\hat{i}\wedge\hat{k}) = -(\hat{k}\wedge\hat{i}) = -\hat{j}$
$(\hat{j}\wedge\hat{k}) = -(\hat{k}\wedge\hat{j}) = -\hat{i}$

$\vec{u}\wedge\vec{v} = u_x v_y \hat{k} - u_x v_z \hat{j} - u_y v_x \hat{k} + u_y v_z \hat{i} + u_z v_x \hat{j} - u_z v_y \hat{i}$

$= (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{k}$

ovvero con una notazione compatta

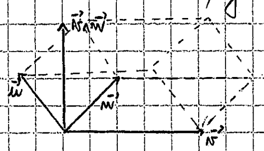
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$ Prodotto vettore

Combinando in $\mathbb{R}^3$ le due citate tipologie di prodotto

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ si ottiene il cosiddetto prodotto misto, ovvero uno scalare

$|\vec{u}||(\vec{v}\wedge\vec{w})|\cos\theta$ Se i tre vettori sono non complanari questa espressione equivale a moltiplicare un'area per la componente di $\vec{u}$ a questa ortogonale, ovvero il volume del parallelepipedo con i tre vettori come spigoli

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$



date le precedenti considerazioni $V = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$ Prodotto misto (o triplo)

E' lecito attendersi che vettori complanari determinino un parallelepipedo degenere e dunque l'analogia prosegua anche nel caso limite

Esercizi

① Valutare l'area del triangolo con vertici $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u} = (0,2,-2)$ $\vec{v} = (1,-1,-1)$ Area parallelogramma $= |\vec{u}\wedge\vec{v}| = 2$ Area triangolo

$|\vec{u}\wedge\vec{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = |i(-2-2) - j(2) + k(-2)| = \begin{vmatrix}-4\\-2\\-2\end{vmatrix}$ $\frac{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$

② Determinare il vettore unitario perpendicolare al piano determinato dai vettori $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix}a\\-b\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\0\\-c\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -b & 0 \\ a & 0 & -c \end{vmatrix} = i(bc) - j(-ac) + k(ab) = \vec{w}$ $\hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$

③ Volume del ~~parallelepipedo~~ ~~parallelepipedo~~ tetraedro i cui vertici sono i punti $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$ = Volume parallelepipedo = 6 Vol tetraedro $V_{tetraedro} = \frac{|-8|}{6} = \frac{4}{3}$

Rette e Piani

Una retta può essere rappresentata in $\mathbb{R}^2$ tramite due tipi di equazione

$ax + by = c$ equazione cartesiana

$\vec{P} = \vec{P_0} + k\vec{v}$ equazione parametrica $\begin{cases} x = x_0 + k\alpha \\ y = y_0 + k\beta \end{cases}$ Il vettore $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dei coefficienti è ortogonale a quello $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ della retta

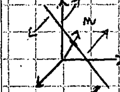
Quando si tratti lo spazio $\mathbb{R}^3$ ogni singola equazione in x,y,z rappresenta una limitazione di un grado di libertà determinando un luogo di punti bidimensionale

L'equazione lineare

$ax + by + cz = 0$ è riscrivibile come $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$ ovvero l'insieme dei vettori ortogonali al vettore della normale $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Al contrario una eq lineare disomogenea $ax + by + cz = d$ sarà $\underline{n}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = d$ ovvero

$\langle \hat{n}, \frac{x,y,z}{|n|} \rangle = \frac{d}{|n|}$ ovvero di $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ la cui proiezione ortogonale sulla retta individuata da $\hat{n}$ è costantemente



uguale a $\frac{d}{|n|}$, vale a dire il piano che interseca tale retta in $\frac{d}{|n|}$

La retta di $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ permane ortogonale al piano

Noti dunque due punti del piano e la sua normale si hanno due forme alternative per rappresentare un piano

$\vec{n}\cdot(\vec{P} - \vec{P_0}) = 0$ relazione vettoriale

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ relazione scalare

L'annullamento di una delle coordinate nell'equazione rende il piano evidentemente parallelo all'asse di quella coordinata

L'equazione del piano per tre punti $\vec{P_1}$ $\vec{P_2}$ $\vec{P_3}$ è rapidamente ottenuta imponendo che se $\vec{P_1P_2} = \vec{w}$ e $\vec{P_1P_3} = \vec{v}$

$\vec{n} = \vec{w} \wedge \vec{v}$ e ricordando che $n_x(x-x_P) + n_y(y-y_P) + n_z(z-z_P) = 0$ è il piano richiesto

In modo ugualmente semplice dati due piani si ricava la loro retta di intersezione (la direzione $\vec{v}$)

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \vec{v}$$ (se i piani non si fossero intersecati sarebbe stato 0)

Una famiglia di piani che si intersecano lungo una linea retta si dice fascio di piani, e l'equazione è determinabile tramite due qualunque dei suoi piani non paralleli

$$ax+by+cz=d \qquad a'x+b'y+c'z=d'$$

L'equazione del fascio sarà combinazione lineare dei due

Fascio di piani

$$\gamma(ax+by+cz-d)+\mu(a'x+b'y+c'z-d')=0 \qquad \boxed{ax+by+cz-d+\lambda(a'x+b'y+c'z-d')=0} \quad \lambda=\frac{\mu}{\gamma}$$

Per quanto riguarda le rette in $\mathbb{R}^3$ l'equazione parametrica rimane identica con vettori di $\mathbb{R}_3$

$\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{v}$ equazione parametrica $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$

Mentre come si è già notato una retta è individuata in $\mathbb{R}^3$ da due insiemi di un grado di libertà, vale a dire l'intersezione di due piani

esercizio

Individuare la retta per $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ~~parallela al vettore~~ $\cancel{\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}$ perpendicolare al piano $x + 6z = 5$

Sarà $\vec{r} = \cancel{\ldots}\ i - 2j + 3k + t(i + 6k)$

Distanze in $\mathbb{R}^3$

La distanza tra due oggetti è sempre intesa come quella minima tra tutte le possibili coppie di punti, per oggetti piatti come rette o piani definiti da eq. lineari esistono dei ragionamenti geometrici (e non differenziali) per ottenere la distanza

PUNTO - PIANO

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

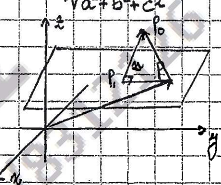
P_1: $ax + by + cz = d$

Si ammetta che P_1 sia il punto più vicino a P_0 $\vec{P_1P_0}$ sarà ortogonale al piano e dunque parallelo alla normale $\underline{n}$, si chiami $s = |\vec{P_1P_0}|$ la distanza

Assunto un generico punto $P(x,y,z)$ appartenente al piano si avrà che $s = \left|\vec{P_0P} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|}\right|$ ovvero la proiezione della distanza da P a P_0 lungo $\underline{n}$

$$s = \left|\frac{(\vec{P_0} - \vec{P}) \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|\frac{\vec{P_0} \cdot \underline{n} - \vec{P} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 \overbrace{(-ax - by - cz)}^{=-d}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$s = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ Distanza punto-piano



Soprassedendo sulla dimostrazione è intuitivo come

$$s = \frac{|(\vec{P_0} - \vec{P_1}) \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$ distanza punto P_0 retta $\vec{P} = \vec{P_1} + t\vec{v}$

$$s = \frac{|(\vec{P_2} - \vec{P_1}) \cdot (\vec{v_1} \wedge \vec{v_2})|}{|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}|}$$ distanza rette $\vec{P} = \vec{P_2} + t\vec{v_2}$, $\vec{P^*} = P_1 + k\vec{v_1}$

Superfici quadriche

Il piano in $\mathbb{R}^3$ è descritto da una equazione di primo grado in tre variabili, si analizzano di seguito alcuni casi particolari della generica eq. di secondo grado

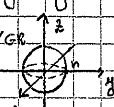
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Sfera

termini di 1° grado

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

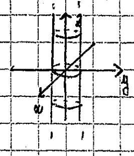


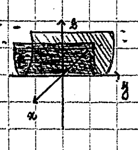
Sfera centrata in (x_0, y_0, z_0)

Cilindri

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=r^2 \\ x^2+z^2=r^2 \\ y^2+z^2=r^2 \end{array}\right\} \text{circolari} \left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right.$$

ellittico





$z = x^2$ Parabolici

Coni circolari

$z^2 = x^2 + x^2 = \cancel{r^2}$ circolare

$z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2$ circolare se $\alpha = \beta$, ~~altrimenti~~ ellittico

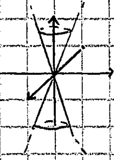
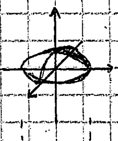


figure dipendenti da (x^2+y^2) sono dette di rotazione intorno a $\hat{z}$

Ellissoide

Deformazione di una sfera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

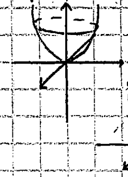


Ogni intersezione con un piano coordinato è un'ellisse

Paraboloidi ellittici

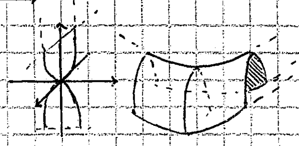
$z = x^2 + y^2$ (di rotazione)

$z = a^2x^2 + b^2y^2$



(Paraboloidi iperbolici (sella)

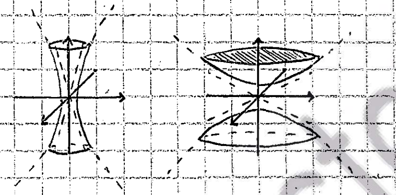
$z = x^2 - y^2$



Iperboloidi

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ una falda

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Due falde



Elementi di algebra lineare

T. Binet

Noti i significati di moltiplicazioni tra matrici e determinanti si ricorda che $\mathrm{Det}\, A^t = \mathrm{Det}\, A$ $\quad \mathrm{Det}\, A \cdot B = \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, B$

$\mathrm{Det}\, A \neq 0 \Rightarrow A$ non singolare $\Rightarrow \exists\, A^{-1} \mid A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad \mathrm{Det}\, A^{-1} = 1/\mathrm{Det}\, A$

- Applicazioni lineari

$F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare se $F(\lambda \underline{x} + \mu \underline{y}) = \lambda F(\underline{x}) + \mu F(\underline{y})$

All'applicazione corrisponde la matrice associata $\mathcal{F}$ tale che

$$F(\underline{x}) = \mathcal{F}(\underline{x}) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_m \end{pmatrix}$$

Se F trasforma in sé stessa $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{F}$ è quadrata e sarà non singolare solo se F è biunivoca e ha l'intero $\mathbb{R}^n$ come immagine (biettiva)

Una composizione di applicazioni lineari è espressa in forma matriciale come il prodotto delle due matrici associate

$F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad \mathcal{F} = n \times m \quad \mathcal{G} = p \times n$

$\overset{G}{\mathcal{G}} \circ \overset{F}{\mathcal{F}}(\underline{x}) = \overset{G}{\mathcal{G}}(\overset{F}{\mathcal{F}}(\underline{x})) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \qquad G(F(\underline{x})) = \mathcal{G} \cdot \mathcal{F} \cdot (\underline{x})$

- Sistemi lineari

Un sistema $m \times n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ equivale a $A\underline{x} = \underline{b}$ con $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{m1} & \cdot & & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

L'equazione non vettoriale $ax = b$ ha unica soluzione $a^{-1}b = x$ per $a \neq 0$, analogamente il sistema ha soluzioni

$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ se e solo se $\mathrm{Det}\, A \neq 0$

Nel caso in cui A sia singolare

Il sistema ha soluzione o meno dipendentemente dal vettore $\underline{b}$ ma se una soluzione esiste questa non sarà unica

si consideri il sistema omogeneo $\underline{b} = \underline{0}$, qualunque vettore x perpendicolare a tutte le righe di A verificherà il sistema (ne è soluzione)

Le righe di A giacciono in uno spazio vettoriale di dim $< n$ ($\mathrm{Det}\, A = 0$) dunque esiste necessariamente almeno una retta di vettori $\underline{x}$ siffatti.

Dunque la soluzione

$A\underline{x} = \underline{0}$ non è unica se A è singolare

Identiche considerazioni valgono per il sistema

$A^T\underline{y} = 0$

Dunque se il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione dovrà valere la relazione

$\langle y, b \rangle = y^T b - y^T A x = (x^T A^T y)^t = (x^T 0)^T = 0$

Vale a dire che $Ax = b$ ha soluzione solo per quei b perpendicolari a ogni soluzione di $A^T y = 0$

In definitiva un sistema lineare - può avere o non avere soluzioni se $n < m$
- ha soluzioni se $m - n$ equazioni sono c.l. delle altre n eq
- se $n > m$ si può cercare di risolvere le m equazioni rispetto a m variabili e trovando che la soluzione dipende da $(n-m)$ variabili.

Regola Cramer
Quando A è non singolare allora la soluzione del sistema $Ax = b$ ha componenti

$$x_1 = \frac{Det\, A_1}{Det\, A} \quad \dots \quad x_n = \frac{Det\, A_n}{Det\, A}$$ dove A_j è la matrice A con j-esima colonna sostituita da b.

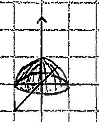
Forme quadratiche
Se x è un vettore colonna e $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata simmetrica allora

$$Q(x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$ è detta forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ corrispondente ad A.

$Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ La forma A detta definita positiva — tutti autovalori > 0 — $\forall D_i > 0$
$Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ — definita negativa — < 0 — $D_i > 0$ $D_j < 0$ i pari j dispari
$Q(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ — Semidefinita > 0 — ≥ 0
$Q(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ — Semidefinita < 0 — ≤ 0 — Nessuna delle precedenti
$Q(x) \gtrless 0$ per $x \neq 0$ diversi $\in \mathbb{R}^n$ — Indefinita — $\gtrless$ — α $Det\, A = 0$

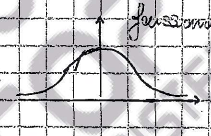
Funzioni reali di più variabili reali
Sono applicazioni del tipo $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovvero che assegnano un unico valore $\mathbb{R}$ ad ogni punto $(x_1 \dots x_n)$
Ovviamente seguendo degli assi coordinati sarà possibile rappresentare il grafico di una funzione (ovvero una al massimo una curva 2D in $\mathbb{R}^3$), in ogni caso si ammetterà che in CD esistono ipersuperfici 3D e così proseguendo.

$S(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
semisfera

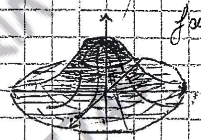


$S(x) = e^{-x^2}$
$S(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

funzione



funzione di rotazione



Come è evidente disegnare questi grafici può essere spesso complesso, si ricorre dunque alla rappresentazione delle sole Curve di livello ovvero delle proiezioni sul piano xy delle curve a una quota è fissata, queste curve sono quelle tali che

$$S(x,y) = C$$

Per entrambi gli esempi precedenti le curve di livello saranno circonferenze concentriche per una funzione

$$S(x,y) = y/x \Rightarrow y/x = C \Rightarrow y = Cx$$ saranno rette per l'origine.

Evidentemente crescendo nel numero di variabili si avranno ~~curve~~ superfici di livello e ipersuperfici di livello

Studio locale
Il concetto di limite è analogo nei casi di una e di più variabili scriveremo che

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} S(x,y) = L$ quando tutti i punti dell'intorno di $(a,b) - \{a,b\}$ appartengono al dominio di S e se $S(x,y)$ si avvicina arbitrariamente a L quando $(x,y) \to (a,b)$

Dunque genericamente $P_0(x_{10} \dots x_{n0})$, $P = (x_1 \dots x_n)$

$$\forall I(L) \exists I(P_0) \mid \forall P \in D \cap I(P_0) \Rightarrow S(P) \in I(L)$$

oppure per due variabili e senza intorni

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid |S(x,y) - L| < \varepsilon \;\; \forall (x,y) \in D \text{ e } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

Non mutando il concetto di limite trattando in intorni di $\mathbb{R}^2$ (dischi di raggio r o porzioni di piano in cui $h > p$) è evidente come anche le proprietà dei limiti dimostrate in $\mathbb{R}$ continueranno a valere.
È però importante che in $\mathbb{R}^2$ i punti del dominio possono tendere a (x_0, y_0) in innumerevoli modi e non solo linearmente come accadeva in $\mathbb{R}$ (x_0^+ e x_0^-). Perché il limite esista è necessario che la funzione tenda allo stesso valore L per ogni possibile percorso, questa proprietà è spesso utile in senso negativo per dimostrare la non esistenza di un limite

Proprietà del limite $\lim S(x) = L$ $\lim f(x) = M$

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} S(x,y) \pm f(x,y) = L \pm M$ $\quad \lim_{(x,y) \to (a,b)} S(x) f(x) = LM$ $\quad \lim_{(x,y) \to (a,b)} S(x,y) / f(x,y) = L/M \quad M \neq 0$