INSIEMI

- La definizione: → CANTOR

Un insieme corrisponde ad una raccolta di oggetti, di qualsiasi natura, pensati come un tutt'uno.

⇓

Dunque un insieme è definito SE e SOLO SE conosciamo gli oggetti che ne fanno parte.

- La simbologia:
  - $x \in A \Rightarrow x$ è un elemento dell'insieme $A \Rightarrow A = \{x; \ ; \ ; \ ; \dots\}$
  - $x \notin A \Rightarrow x$ non appartiene all'insieme A
  - $A = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\}$ corrisponde all'insieme di oggetti che rispettano l'affermazione $P(x)$.

  RICORDA: va sempre indicato l'insieme numerico senno l'affermazione non ha senso.

- Tipologie di insiemi:
  - Un insieme è DISCRETO se per ogni elemento appartenente all'insieme ne troviamo uno immediatamente successivo.
    → ESEMPIO: $\mathbb{N}$
  - È definito CORPO un insieme dotato di due operazioni binarie interne, la somma ed il prodotto, che soddisfa i seguenti assiomi:
    - $(a+b)+c = a+(b+c)$ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA
    - $a+b = b+a$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA
    - $0+a = a$

  Inoltre il corpo è un insieme ordinato se:

  considerando $a \leq b$ e $c \geq 0$,

  si ha che:
  - $a+c \leq b+c$
  - $a \cdot c \leq b \cdot c$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Un insieme è DENSO se per ogni coppia di elementi appartenenti all'insieme vi è sempre un elemento dell'insieme compreso tra i due.
  → ESEMPIO: $\mathbb{Q}$
- Un insieme è COMPLETO se esiste una corrispondenza tra lo stesso e l'insieme dato.
  → ESEMPIO: $\mathbb{R}$

INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; \infty\}$
- $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri **NATURALI**, ovvero l'insieme dei numeri interi e maggiori di zero (escluso).
- È un insieme discreto.

- $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ $\{-\infty ; +\infty\}$
- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri **INTERI**, ~~[illegible]~~

- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m}; \dots\right\}$, in cui $\frac{n}{m}$ sono numeri primi tra di loro.
- $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri **RAZIONALI**, ovvero dei numeri:
  - decimali finiti → Esempio: $\frac{1}{2} = 0,5$. Tra i divisori del denominatore ci sono sempre e solo il 2, il 5, o entrambi
  - decimali infiniti, MA periodici → Esempio: $\frac{1}{3} = 0,\overline{33}$

Per risalire da un n° periodico al suo n° razionale:

$x = 0,\overline{16}$ → A - $10 \cdot x = 1,\overline{6}$ sottrai → $90x = 15$

B - $100x = 16,\overline{6}$

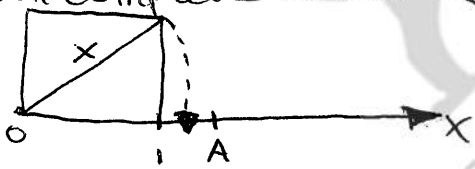
$x = \frac{15}{90} = 0,\overline{16}$

- $\mathbb{Q}$ è un insieme denso. Infatti:

$r, r' \in \mathbb{Q}$ ⇓ $\frac{r+r'}{2}$ è un numero razionale



- $\mathbb{Q}$ non completa la retta. Infatti:



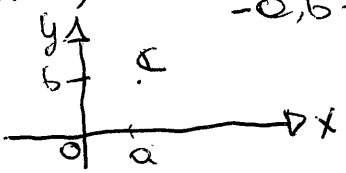
$\overline{OA} = x$

Per pitagora $x = \sqrt{2} = 0$ $x^2 = 2$.

Dato che non esiste alcun $\mathbb{Q}$ che soddisfa questa equazione, ho che $\mathbb{Q}$ non completa la retta e lascia fuori infiniti punti.

- $\mathbb{R} = \begin{cases} \text{decimali periodici e finiti} = \mathbb{Q} \\ \text{decimali non periodici e infiniti} \end{cases}$
- $\mathbb{R}$ è un corpo ordinato.
- $\mathbb{R}$ è un insieme completo.
- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri **REALI**

- $\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri **COMPLESSI**, che sono bidimensionali poiché associati ai punti del piano cartesiano.
- I numeri complessi sono del tipo $a + i \cdot b$, in cui
  - i = unità immaginaria
  - $a, b \in \mathbb{R}$
- Nel piano cartesiano: a = Ascissa, b = ordinata



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 380 9837745

PROPOSIZIONI

- ENUNCIATO APERTO → è aperto se dipende da una variabile, e quindi può essere sia VERO che FALSO. Esempio: P(x) $x^2 < 4$ P(1) V; P(5) F
- ENUNCIATO CHIUSO → è chiuso quando non è necessario assegnare un valore alla variabile perché sono presenti i connettivi logici

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esistono da TRE tipologie:

- I quantificatori, che si dividono in → universali → ∀ "per ogni"
  → esistenziali → ∃ "esiste"
  non si nega asserendo ∄, ma affermando il contrario.
- Le negazioni → se ho una proposizioni P, negarla significa affermare • "non P" OPPURE • "¬P"
- Le implicazioni → SE ... ALLORA ... ovvero $P \Rightarrow Q$

→ Le implicazioni

$P \Rightarrow Q$

- A SX (P) ho l'IPOTESI o la PREMESSA
- A DX (Q) abbiamo la TESI o CONSEGUENZA

Inoltre dobbiamo ricordare che:

- P è condizione SUFFICIENTE a Q
- Q è condizione NECESSARIA a P

Ricordo i casi del th. di Rolle

- SE Q è FALSA, P è FALSA. ovvero → Se la tesi è FALSA, anche l'ipotesi lo è.
- SE Q è VERA, non è possibile determinare se P è vera o falsa.
  ovvero
  La validità della tesi non implica necessariamente la validità dell'ipotesi.
- SE P è VERA, Q è VERA ovvero → se l'ipotesi è vera, anche la tesi è tale.

+ Un particolare simbolo di implicazione è il "SE E SOLO SE", ovvero $\Leftrightarrow$
  Esempio: - n pari $\Leftrightarrow$ n-1 è dispari
  - Il Δ ha 3 lati uguali $\Leftrightarrow$ ha 3 angoli uguali

→ I quantificatori

- Le barriere è un numero che, se presente in una proposizione, limita l'incognita opportunamente ad un dato insieme.

Esempio: consideriamo $A \in \mathbb{R}$ e le proposizioni:

1- $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$ → sono limitati SUPERIORMENTE, poiché la barriera esclude valori superiori a M.

2- $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \geq M$ → sono limitati INFERIORMENTE, poiché la barriera esclude numeri inferiori a M.

- I quantificatori sono seguiti da due differenti segni di interpunzione:
  - universali → $\forall$ → è seguito dalla VIRGOLA
  - esistenziali → $\exists$ → è seguita dai DUE PUNTI

→ Le negazioni

Per negare una proposizione in cui sono presenti dei QUANTIFICATORI, è necessario:

1- Invertire il simbolo dei quantificatori universali con quello dei quantificatori esistenziali e viceversa.

2- Negare l'ultima frase: in particolare se essa è un'IMPLICAZIONE, dobbiamo dire che per P VERA, Q è FALSA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DUE PROPOSIZIONI

Considerate le proposizioni P, Q:

- se scrivo P e Q → voglio che si verifichino entrambe
- se scrivo P o Q → voglio che se ne verifichi ALMENO una

Esempi: considero due insiemi generici A e B

1- $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ → abbiamo l'INTERSEZIONE, perché x deve appartenere contemporaneamente ai 2 insiemi affinché le proposizioni si verifichino entrambe

2- $\{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$ → abbiamo l'UNIONE, poiché deve verificarsi almeno una delle due proposizioni, e dunque x può:
   - appartenere solo ad A
   - appartenere solo a B
   - appartenere ad entrambi

SEMPLIFICAZIONE DI ESPRESSIONI

Date due espressioni (1) e (2), esse possono essere congiunte da:

- $\Leftrightarrow$, e in questo caso 1 e 2 hanno le stesse soluzioni
- $\Rightarrow$ e in questo caso l'espressione a sx ha le stesse soluzioni di quella a dx, MA non viceversa.

⇓

Quando dopo n passaggi trovo le soluzioni, ovvero che:

- le soluzioni sono sempre VERE se nella semplificazione ho usato solo $\Leftrightarrow$
- se invece la semplificazione è irreversibile, OVVERO se in almeno un passaggio ho utilizzato $\Rightarrow$, dovrò effettuare la VERIFICA A POSTERIORI, ovvero controllare se le soluzioni trovate sono effettivamente soluzioni.

⇓

A questo punto ho TRE CASI:

- che siano ENTRAMBE soluzioni
- che UNA SOLA sia soluzione
- che NESSUNA sia soluzione

INTERVALLI

- $(a;b)$ → Intervallo Aperto: estremi esclusi
- $[a;b]$ → Intervallo chiuso: estremi compresi
- $[a;+\infty)$ → semiretta chiusa
- $(a;+\infty)$ → semiretta aperta

f(x) PARI e DISPARI

- Una funzione è PARI se $f(x)=f(-x)$: simmetrica rispetto alle ORDINATE → $f(x)=x^2$
- Una funzione è DISPARI se $f(-x)=-f(x)$: simmetrica rispetto all'ORIGINE → $f(x)=x^3$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745