Analisi 1

Insieme

Viene detta INSIEME una collezione di oggetti di qualunque tipo, questi sono detti gli elementi dell'insieme l'appartenenza di un elemento all'insieme è data dal simbolo

$x \in A \qquad x \notin A$

Un insieme è detto definito se sono noti tutti i suoi elementi, questi sono rappresentabili in due modi

$A = \{1, 5, 7\}$, $A = \{x \in \mathbb{K} \mid P(x)\}$

es

$A = \{x \in \mathbb{K} \mid x^2 < 4\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{N} \Rightarrow A = \{1\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{-1, 0, 1\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow A = \{x \mid |x| < 2\} = (-2; 2)$

La proposizione $x^2 < 4$ dell'esempio è una proposizione aperta, ovvero non se ne può stabilire di per la verità, diventa chiusa ponendo delle condizioni su x

$x^2 < 4$ Aperta $\qquad x^2 < 4$ con $x = 3$ è chiusa (e falsa)

Affermazioni chiuse e che non necessitano di condizioni come:

tutti i naturali multipli di 6 sono pari
Non esiste nessun numero dispari

MASTER COPY
Tel 050 8312126
Cell. 388 9837745

Sono esprimibili tramite dei quantificatori:

$\forall$ per ogni — $\nexists$ nessuno — $\Rightarrow$ Implica ($A \Rightarrow B$ se A è vero B è vero)

$\exists$ Esiste almeno uno — $\exists!$ Esiste ed è unico — $\Leftrightarrow$ Se e solo se ($A \Leftrightarrow B$ entrambi veri o entrambi falsi)

La soluzione di equazioni ed disequazioni è una concatenazione di $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$, se si usano solo doppie implicazioni (passaggi reversibili) al termine si ottiene l'elenco delle soluzioni, se si ricorre anche ad una singola implicazione semplice si ottengono (oltre alle soluzioni) degli elementi che non verificano le condizioni dell'equazione

es

$\sqrt{x} = -x \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ (vero)

L'implicazione è vera solo $\Rightarrow$ ma non $\Leftarrow$

$x = x^2 \not\Rightarrow \sqrt{x} = -x$ (falso)

una dei due risultati infatti non è soluzione (per $x = 1$)

Per ovviare una doppia implicazione è necessario restringere i numeri sui quali si opera ovvero il campo di esistenza

$\sqrt{x} = -x$ ma $x \geq 0$ per il campo di esistenza della radice dunque $\Rightarrow -x = \sqrt{x} \Rightarrow -x \geq 0$

la radice è sempre positiva

Se a questa punto si risolva il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \\ x = 1 \vee x = 0 \end{cases}$$

Si ottiene l'unica soluzione

Dimostrazioni:

I connettivi logici $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ sono usati come sopra nella risoluzione di equazioni e disequazioni ma anche nella dimostrazione di teoremi:

IPOT TESI
$P \Rightarrow Q$

Per dimostrare la verità di un teorema non è sufficiente che l'implicazione sia vera, deve essere anche la tesi

Ora!

$1 > 2 \Rightarrow 2 > 3$ L'implicazione è vera ma l'ipotesi no

Per procedere ad una dimostrazione diretta è quindi necessario

1) Porre un'ipotesi supposta vera
2) Mostrare che $P \Rightarrow Q \rightarrow$ (si procede per catene transitive di $\Rightarrow$) $P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow (Q \rightsquigarrow P \Rightarrow Q)$
3) Si può concludere $P \Rightarrow Q$ e che dunque Q è vera

esempio di dimostrazione diretta

Ogni multiplo di 4 è pari

$\forall n \in \mathbb{N} \mid n = 4\alpha, \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow n$ è pari

1) Presa un naturale multiplo di 4 $n = 4\alpha$
2) Nota che è due volte un numero naturale $n = 2 \cdot (2\alpha)$
3) n è pari

Un secondo tipo di dimostrazione è quella per assurdo

1) Si assume come vera la negazione della tesi: Q e l'ipotesi: P
2) Si mostra che $Q \Rightarrow P$
3) Questo conduce al risultato assurdo che Sia P Sia $\bar{P}$ siano vere, dunque Q deve essere falsa quindi: Q è vera

esempio di dimostrazione per assurdo

ogni multiplo di 4 è pari

$\forall n \in \mathbb{N} \mid n = 4\alpha \Rightarrow n$ è pari

1) n è dispari $n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N}$
2) $4\alpha = n = 2k-1 \rightsquigarrow 2(2\alpha) = 2k-1$ ✓ Assurdo
3) n è pari

Il principio per negare qualunque proposizione è invertire i quantificatori e negare l'ultima frase

$\forall \exists$ + Negazione

es $A \subset \mathbb{R}$

- $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, x \leq M$ A non è limitata superiormente
- $\forall M \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, x > M$ A non è limitata superiormente
- $\forall x \in A \mid \exists M \in \mathbb{R}, x < M$ A non è limitata inferiormente
- $\exists x \in A, \forall M \in \mathbb{R} \mid x \geq M$?

Congiunzioni (altri operatori logici)

e $\wedge$ oppure $\vee$

$P \wedge Q$ è vera se sia P sia Q sono vere Intersezione

$P \vee Q$ è vera se almeno una tra P e Q è vera Unione

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

25

$$E=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<4\}=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|<2\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\wedge x>-2\}$$

$$O=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\geq 4\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -2\vee x\geq 2\}$$

$E=\{x<2\}\cap\{x>-2\}$ | Si dicono insiemi disgiunti: $E\cap O=\emptyset$

$O=\{x\leq -2\}\cup\{x\geq 2\}$ | Si dicono insiemi complementari: $E\cup O=\mathbb{R}$

Schemma dimostrazioni:

Diretta	Per Assurdo
P è vera	P è vera
$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow \not P$
Q è vera	Q è falsa $\Rightarrow$ Q è vera

Equazioni e disequazioni, radici, campo di esistenza

Se si tratta di disequazione con valore assoluto

$|x^2-1|=x$ sappiamo risolverla $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\ x^2-x-1=0\end{cases}\vee\begin{cases}x^2-1<0\\ x^2+x-1=0\end{cases}\rightsquigarrow\begin{cases}x\geq 1\vee x\leq -1\\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}-1<x<1\\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

Questa equivale a svolgere l'implicazione semplice

$|x^2-1|=x\iff x^2-1=x\vee x^2-1=-x$ (Perché sia doppia è necessario che $x\geq 0$)

$\left[x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ $\left[x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$

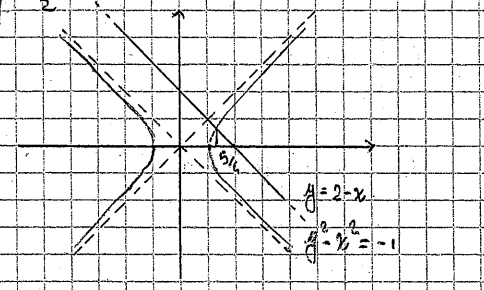
Pertanto una soluzione sarà la restrizione $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-1=x\end{cases}\vee\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-1=-x\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq 0\\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=x_{1,2}\end{cases}\vee\begin{cases}x\geq 0\\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=x_{3,4}\end{cases}\rightsquigarrow\left[x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\left[x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$

Considerazioni simili si applicano alla radice

$\sqrt{a}$ a è sempre ≥ 0

$\sqrt{x^2-1}=2-x$ $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\ x^2-1=x^2+4-4x\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq -1\vee x\geq 1\\ x=5/4\end{cases}$



Dal punto di vista grafico disegnamo le due curve

$\begin{cases}y=\sqrt{x^2-1}\\ y=2-x\end{cases}$ EQUIVALE A $\begin{cases}y^2=x^2-1\quad y\geq 0\\ y=2-x\end{cases}$

Chiedersi: $\sqrt{x^2-1}>2-x$ equivale a chiedersi quando il ramo di iperbole è sopra la retta, è evidente che questo avviene per $x>5/4$

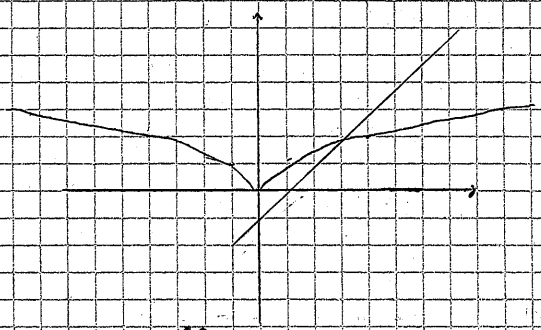
Dal punto di vista algebrico si presentano due casi: il primo in cui $2-x\geq 0$, in questa caso è corretto elevare al quadrato senza ulteriori specifiche.
Nel secondo caso RHS<0 questa sistema è sempre risolvibile e la sua soluzione è soluzione dell'espressione

$\begin{cases}x^2-1\geq 0 & \text{radice}\\ 2-x\geq 0 & \text{RHS}\geq 0\\ x^2-1>x^2-4x+4 & \text{quadrato}\end{cases}\vee\begin{cases}x^2-1\geq 0 & \text{radice}\\ 2-x<0 & \text{RHS}<0\end{cases}$

I $\begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x \le 2 \\ x > -5/4 \end{cases}$ $\vee$ II $\begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$[-5/4, 2) \cup [2, +\infty]$

$[-5/4, +\infty]$ come già trovato



Facciamo una cosa con entrambe le operazioni

$\sqrt{|x|} \ge x - 1$ I $\begin{cases} |x| \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ |x| \ge x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ $\vee$ II $\begin{cases} |x| \ge 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \rightsquigarrow \forall x \in$ (x < 1)

I.I $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 0 \text{ ABS} \\ x \ge x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ $\vee$ I.II $\begin{cases} x \ge 1 \\ x < 0 \\ -x \ge x^2 - 2x + 1 \end{cases} \rightsquigarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

I.I $\begin{cases} x \ge 1 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \rightsquigarrow$ La soluzione è l'unione dei tre intervalli

$1 \le x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vee \exists x \in \mathbb{R} \vee x < 1$ Ovvero $\left[x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$

Applicazioni:

Dati A, B insiemi $\neq \emptyset$ $f: A \to B$ è una legge che a elementi di A fa corrispondere elementi di B

Deve ① Ogni elemento di A deve associarsi a qualche elemento di B

$\forall a \in A \; \exists b \in B \mid f(a) = b$

② Ad ogni elemento di A deve corrispondere un solo elemento di B

$\forall a \in A \; \exists_1 b \in B \mid f(a) = b$

In una applicazione

$f: A \to B$ $\quad$ A è il dominio $\quad$ b è immagine di a

$f(a) = b$ $\quad$ B è il codominio $\quad$ $\{f(a) \; a \in A\}$ è l'immagine di A $f(A)$

È dunque chiaro che $f(A) \subset B$ ed in particolare se $f(A) = B$ l'applicazione si dice suriettiva

Una applicazione in cui $\begin{cases} A = \mathbb{R} \\ B = \mathbb{R} \end{cases}$ è detta funzione reale di variabile reale

Ogni funzione è associata al proprio caratteristico campo di esistenza (C.E.) ovvero il più grande insieme in cui la funzione ha senso. Fintanto che siamo nel campo di esistenza il dominio è arbitrario, se non è specificato si considera tutto il campo.

[es]

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$

$\sqrt{|x^2-1|} \neq 0$

$|x^2 - 1| \neq 0$

$x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$[x = \pm 1]$

$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$

$\frac{x-1}{x+1} \ge 0$

$x \ge 1$

$x \neq -1$

$[x \ge 1 \vee x < -1]$

$f(x) = \log \frac{x-2}{x^2 - 2x}$

$f(x) = \log \frac{(x-2)}{x(x-2)} \rightarrow (x-2) \neq 0 \quad x \neq 2$

$f(x) = \log \frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x} > 0 \quad x > 0$

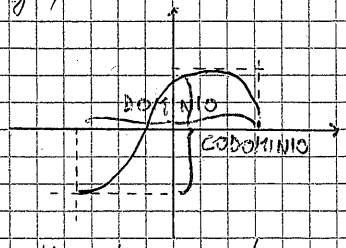
$[x > 0 - \{2\}]$

Funzioni

Come già visto ogni funzione è una applicazione tra due insiemi $\{A, B \mid \forall a \in A\ a \in \mathbb{R}\ \forall b \in B\ b \in \mathbb{R}\}$

$f: A \to B \quad A, B \subset \mathbb{R}$, come in ogni applicazione A è detto il Dominio, B il codominio S(A) l'immagine

Assegnando alle coordinate x e y le rispettive posizioni ogni funzione è rappresentata da una grafica



Dom → posizione di $\hat{x}$ lungo l'asse $\hat{x}$

Cod → posizione di $\hat{y}$ lungo l'asse $\hat{y}$

Il codominio è l'insieme di tutte le immagini, ovvero tutti i valori k che soddisfano l'espressione

$S(x) = k$

Es3

✓ $S(x) = x^2$; $S(x) = k$; $x^2 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$ k deve dunque essere ≥ 0 $S(A) = \boxed{\mathbb{R}^+}$

✓ $S(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}$ $2^{\frac{x}{x-1}} = k$ $\frac{x}{x-1} = \log_2 k \rightsquigarrow x = x\log_2 k - \log_2 k \rightsquigarrow x = \frac{\log_2 k}{\log_2 k - 1}$ $\log_2 k \neq 1 \rightsquigarrow \boxed{k \neq 2}$

✓ $S(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = k$ $x^2 - 3x + 2 - k^2 = 0$ $\frac{3 \pm \sqrt{1 + 4k^2}}{2}$ $1 + 4k^2 \geq 0\ \forall k \in \mathbb{R}$ Cod $= \boxed{\{k \geq 0\}}$

$S(x) = e^x + e^{-x}$ $\frac{e^x \cdot e^x - 1}{e^x} = k$ $e^{2x} - e^x k + 1 = 0$ $t^2 - kt + 1 = 0$ $e^x = t$

$t = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ $k^2 - 4 \geq 0$ $k \leq -2 \vee k \geq 2$ $x = \log t \rightsquigarrow x = \log \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$

I $\begin{cases} k \leq -2 \vee k \geq 2 \\ k + \sqrt{k^2 - 4} > 0 \end{cases}$ II $\begin{cases} k \leq -2 \vee k \geq 2 \\ \sqrt{k^2 - 4} < k \end{cases}$

I $\begin{cases} -k > 0 \\ k^2 - 4 > k^2 \end{cases}^{\vee} \begin{cases} -k < 0 \\ \end{cases}$ II $\begin{cases} k > 0 \\ k^2 - 4 < k^2 \end{cases}^{\vee} \begin{cases} k < 0 \\ \sqrt{k^2 - 4} < k \end{cases}$

$\begin{cases} k < 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k > 0 \\ \end{cases}$ $\begin{cases} k > 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \nexists x \\ \end{cases}$

$\nexists x \vee k > 0$ $\vee$ $k > 0 \vee \nexists x \rightarrow \begin{cases} k \leq -2 \vee k \geq 2 \\ k > 0 \end{cases} \rightarrow [k \geq 2]$

Funzioni particolari

$S(-x) = S(x) \Rightarrow$ funzione Pari (Simmetrica rispetto a $\hat{y}$)

$S(-x) = -S(x) \Rightarrow$ funzione Dispari (Simmetrica rispetto a 0)

Una funzione è definita iniettiva quando $\forall x_1, x_2 \in A$ (Dominio), $x_1 \neq x_2 \Rightarrow S(x_1) \neq S(x_2)$ ovvero "per ogni valore x diverso esiste un diverso valore y a questa associato"

$\forall x \in A\ \exists y \in B$ NON è definizione di funzione iniettiva ma semplicemente di funzione

In una funzione iniettiva non ci sono due valori di x diversi in cui S(x) abbia lo stesso valore

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745