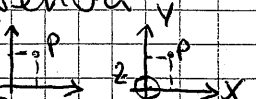
ANALISI MATEMATICA II 27/Sett/2016

La differenza sostanziale fra analisi 1 e analisi 2 è lo spazio in cui vengono rappresentate le funzioni $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^m$ (scalari, vettori)

retta cartesiana



$P=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Se $n=2$ o $n=3$

$\mathbb{R}^2$ $P=(x_1,x_2)=(x,y)$ $\mathbb{R}^3$ $P=(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$

Terna destrorsa

CAPITOLO 1 LINEE DI LIVELLO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $n=2$ $f(x,y)=x^2+y^2$ $C \in \mathbb{R}$

Al vettore associo un numero zero $(0,0)$

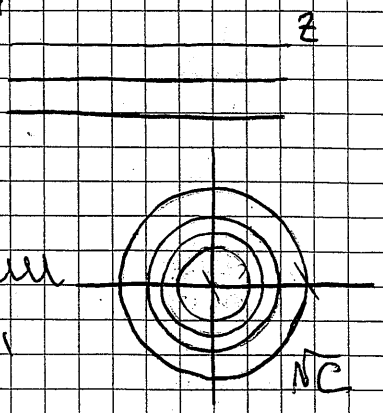
Di questa funzione studio: il campo segno (+) di esistenza (il dominio), il segno, gli zeri, infine il grafico che è un insieme di esse, disegnato in $\mathbb{R}^3$

$G_f = \{(x,y,z) / (x,y) \in A;\ z = f(x,y)\}$

$P_1(1,0,1)$ $z=x^2+y^2$ $P_1 \in G_f$ ✓

$P_2(1,-1,4)$ $P_2 \in G_f$ ✗

$(x,y): f(x,y)=C$ Linee di livello C



Nel piano il disegno sarà un fascio di circonferenze di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{C}$

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = C \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

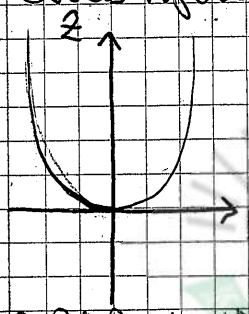
LINEE DI LIVELLO

Sono linee schiacciate sul piano Oxy

OSS 1 Le linee di livello ci fanno capire che la funzione è positiva o uguale a zero

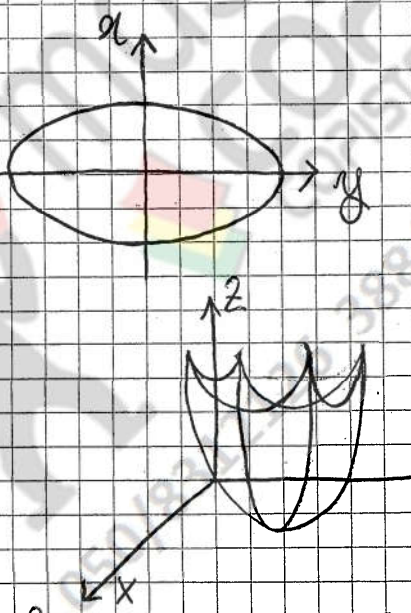
OSS 2 Se esistono le linee di livello, allora si tratta di un solido di rotazione attorno all'asse z

N.B. Le curve di livello sono sempre delle circonferenze



PARABOLOIDE CIRCOLARE DI ROTAZIONE

$z = x^2 + y^2$



PARABOLOIDE ELLITTICO

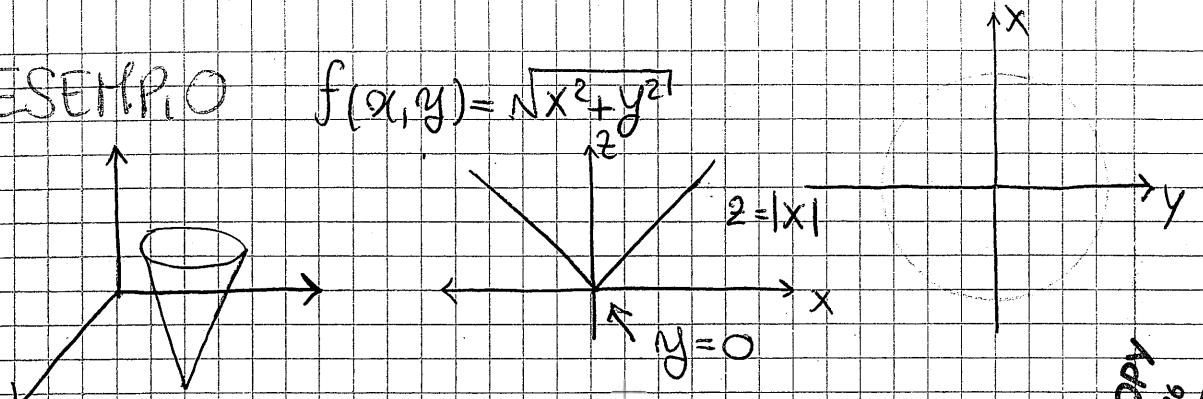
ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $\quad C=0 \quad C>0$

Le linee di livello disegnano ellissi

Il solido che si forma tridimensionalmente è il paraboloide ellittico, che non è un solido di rotazione

ESEMPIO $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

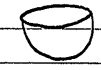


CONO AD UNA FALDA / CONO ELLITICO / CONO A SEZIONE ELLITICA

ESEMPIO

Se si disegna questo grafico → (ff. 0)

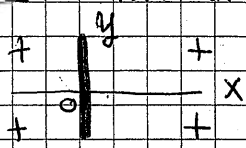
Si pensa di sondare questa funzione $x^2+y^2+z^2=R^2$ ricavo

$z=\sqrt{-x^2-y^2+R^2} \Rightarrow z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2} \rightarrow z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 

$\searrow z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 

ESEMPIO

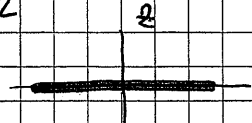
$f(x,y)=x^2 \quad z=x^2 \quad (x,y): x^2=c$

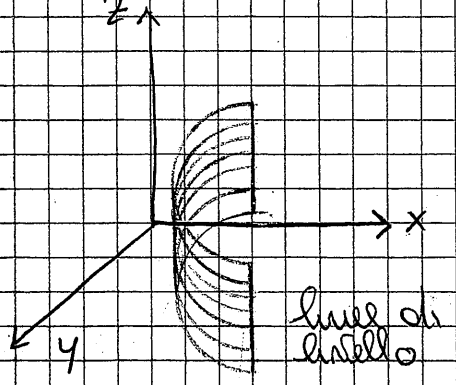


$\forall c$ trovo due rette parallele a y una positiva e una negativa; LINEE DI LIVELLO rette $x=\pm\sqrt{c}$

Sezione Oxz parabola $z=x^2$

Sezione Oyz asse y





CILINDRO PARABOLICO

$(x,y): x^2+y^2=1$ in $\mathbb{R}^2$ } (*)

$(x,y): x^2+y^2=1$ in $\mathbb{R}^3$ }

(*) Cilindro di rotazione di raggio 1 attorno all'asse z

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

CURVE DI LIVELLO

Sono delle superfici $f(x,y,z)=c$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $\quad f(x^2+y^2+z^2)=x^2+y^2$

$f(x,y)$ → Spazio tridimensionale $\boxed{x^2+y^2=1}$

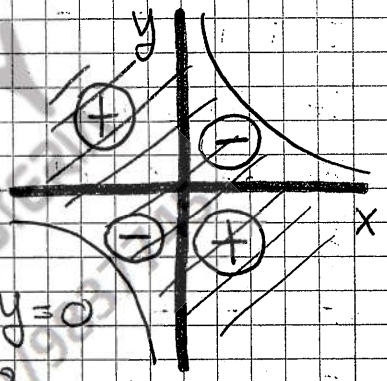
$f(x,y,z)$ → Spazio quadridimensionale (impossibile da disegnare su un foglio

$x^2+y^2=1 \Rightarrow$ CILINDRO CIRCOLARE

ESERCIZIO

$f(x,y)=\lg(1-xy)$

C.E. $1-xy>0$ $\quad \begin{cases} xy<1 \\ x>0 \end{cases}$



$\begin{cases} y<\frac{1}{x} \\ x>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y>\frac{1}{x} \\ x<0 \end{cases}$

Zeri: $x=0$ $y=0$

Segno: $xy<0$

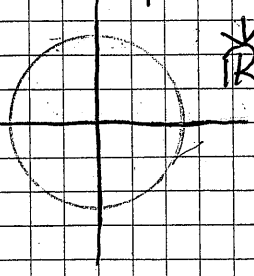
$xy=0$ $\quad -1<xy<1$

CAPITOLO 2 CURVE

$\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $\quad x=\varphi(t)$ eq. parametrica della curva $\varphi(I)$ sostegno della curva $\varphi: [0,2\pi]$

ESEMPIO

$\varphi(t)=(\cos t; \sin t)$ curva piana



$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ eq. parametrica

Il sostegno di questa curva è la circonferenza di $\varphi(I)$: $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$

In meccanica, t è la legge oraria del moto

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

eq. parametriche del moto $x = \varphi(t)$
Traiettoria $\varphi(I)$ è data dal sostegno della curva.
ESEMPIO (STESSO ESEMPIO - VISTO DA UN'ALTRA ANGOLAZIONE)
Partiamo da una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, cerchiamo di rappresentarla in forma parametrica $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$
$\varphi(t) = (\cos t; \sin t)$
parametrizzare la circonferenza
In generale, prendo una curva del piano o dello spazio ($\mathbb{R}^n$): cioè scelgo un sottoinsieme in $\mathbb{R}^n$ che si possa parametrizzare in una funzione $\varphi(t)$ che abbia certe proprietà, quindi posso scrivere le equazioni parametriche e da queste ricavare le proprietà della curva.
PROBLEMA: Una stessa curva può avere ∞ parametrizzazioni diverse? Se prendo parametrizzazioni "semplici" sono tutte equazioni semplici tra loro cioè uniche, tranne eventualmente agli estremi degli intervalli.