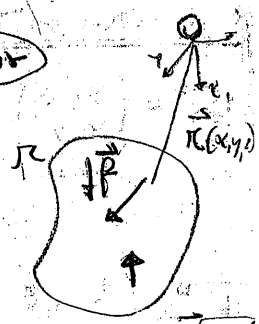


SOLIDO CONTINUO ⇒ se $\forall (A,B) \in R \; \exists$ una linea spezzata di pti interni che li unisce



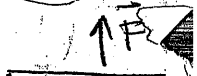
II MONOCONNESSO ⇒ se $\forall$ σ interna al solido contiene solo pti interni al solido stesso

ANALISI DELLA TENSIONE



- $\vec{f}(x,y,z)$ = FORZE DI VOLUME o FORZE A DISTANZA $\left[F/L^3\right]$ (es. forza peso, forza centrifuga, forza elettromag.)
  conosciute a pti interni
- $\vec{F}(x,y,z)$ = FORZE DI SUPERFICIE o DI CONTATTO $\left[F/L^2\right]$
  su relative allo frontiera

- $\int_R \vec{f}(x,y,z)\,dV + \int_{\partial R} \vec{F}(x,y,z)\,dS = 0$ → EQ. ALLA TRASLAZIONE
  ∂R confine di R



ESEMPIO: se un corpo è in equilibrio anche una sua parte è in equilibrio

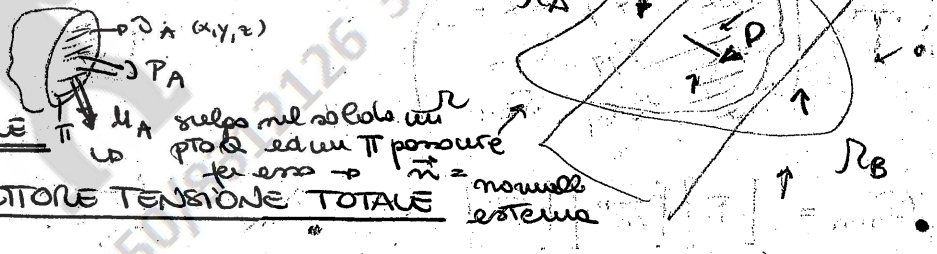
- $\int_R \vec{f}(x,y,z) \wedge \vec{\pi} \, dV + \int_{\partial R} \vec{F}(x,y,z) \wedge \vec{r}(x,y,z)\,dS = 0$ → EQ. ALLA ROTAZIONE
  $\vec{\pi}$ vettore posizione

eq. di equilibrio delle forze esterne

le due condizioni devono valere contemporaneamente ⇐ $\begin{cases} \sum \vec{R} = 0 \\ \sum \vec{M}_0 = 0 \end{cases}$

Se taglio il solido R con un piano Π ⇒ per l'equilibrio allora devono far fare emergere altre forze dette FORZE DI SUP. INTERNE ⇒ TENSIONI

⇒ $\begin{cases} \vec{R}_A + \vec{P}_A = 0 \\ \vec{M}_A + \vec{\mu}_A = 0 \end{cases}$ risultante tensioni: forza A di Π / momento risultante delle tensioni



VETTORE TENSIONE TOTALE

$\lim_{|\Delta S| \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \vec{t}_n$ = VETTORE TENSIONE TOTALE

$\lim_{|\Delta S| \to 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S} = \emptyset$ ⇒ MATERIALI DI CAUCHY, se $\neq 0$ ⇒ MAT. DI COSSERAT (Cosserat)

Se anche SOLIDO DI CAUCHY

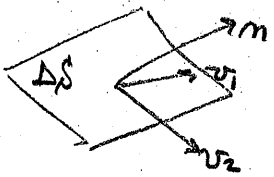
Posso conoscere lo STATO DI TENSIONE DI UN SOLIDO → lo stato di tensione di un pto è l'insieme dei $\vec{t}_n$ al variare di $\vec{n}$ in P.

$\vec{t}_n(x,y,z,n_x,n_y,n_z)$ → è funzione anche della normale del piano

posso decomporlo anche: $\vec{t}_n = \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Posso decomporre $\vec{t}_n$ anche su di un intero di riferimento locale (v_1, v_2, n)



$\left[v_1, v_2 \in \Delta S \;\; \vec{n} \perp \Delta S \right]$

$\vec{t_n} = \begin{pmatrix} t_{n v_1} \\ t_{n v_2} \\ t_{n n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{n v_1} \\ \tau_{n v_2} \\ \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ → σ_{nn} = TENSIONE NORMALE → in un pto di sposta cambiare a seconda delle normali esterne

$\tau_{n v_1}, \tau_{n v_2}$ = TENSIONI TANGENZIALI (// allo sup)

EQ. LOCALE o TEOREMA TETRAEDRO CAUCHY

$\vec{t_n} = \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix}$ $t_x = \begin{pmatrix} t_{xx} = \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ t_{xz} = \tau_{xz} \end{pmatrix}$ $t_y = \begin{pmatrix} t_{yx} = \tau_{yx} \\ t_{yy} = \sigma_{yy} \\ t_{yz} = \tau_{yz} \end{pmatrix}$ $t_z = \begin{pmatrix} t_{zx} = \tau_{zx} \\ t_{zy} = \tau_{zy} \\ t_{zz} = \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

lo riscrivo sugli assi coordinati

$\vec{t_n} = \begin{pmatrix} t_{nn} = \sigma_{nn} \\ t_{n v_1} = \tau_{n v_1} \\ t_{n v_2} = \tau_{n v_2} \end{pmatrix}$ ↓ EQ. IN DIREZIONE x

$\tau_{i,k}$ → // i dir L

VETTORE TENSIONE TOTALE NEL SIST (x,y,z)

$t_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{pmatrix}$

Nel sistema di riferimento locale ⇒ $\sigma_{nn} = \vec{t_n} \cdot \vec{n}$

$\tau_{n v_1} = \vec{t_n} \cdot \vec{v_1}$

$\tau_{n v_2} = \vec{t_n} \cdot \vec{v_2}$

introduco la matrice T = TENSORE DEGLI SFORZI → matrice che deve dà Tensori nel pto P. — operatore che lavora su forze produce

$T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ T.C.

MASTER COPY Tel. 050 0312126 Cell. 388 9837745

$\sigma_{nn} = [T][\vec{n}][\vec{n}]$ e $\tau_{nv} = [T][n][v]$

⇒ $\vec{t_n} = T \cdot \vec{n}$ con $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix}$

↓ posso dire che $\vec{t_n}$ dipende linearmente da $\vec{n}$, per cui posso lo stato di Tensione in un pto con l'ausilio di T

Altra notazione più compatta:

$\begin{cases} \sigma_{zz} = \sum_{i,k=1}^{3} \sigma_{ik} n_i n_k \\ \tau_{nv} = \sum_{i,k=1}^{3} \sigma_{ik} n_i v_k \end{cases}$ $i,k = \begin{matrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

lo stato di tensione di un pto è noto se ho $T(P)$ → TENSORE DEGLI SFORZI INP

$\vec{t_n}(P, \vec{n}) = T(P) \cdot \vec{n}$

Il T. CAUCHY → semplifica la dipendenza dalle sei quantità ci si limita alla ricerca di matrici

↳ disegno un cubetto di lato dx, dy, dz → isolato da un solido Ω

→ ip: σ_{ik} sono C^1 derivabili con continuità

EQ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO DI CAUCHY → sono eq. locali

EQ. in DIREZIONE X: → sono tutte le possibili forze

$$f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

EQ. IN DIREZIONE Y:

$$f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

EQ. IN DIREZIONE Z:

$$f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

in maniera più compatta

① $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + f_k = 0$

EQUILIBRI ALLA TRASLAZIONE

② $\operatorname{div} \mathbf{T} + \vec{f} = \vec{0}$

σ = TENS. NORM → agiscono $\perp$ alla faccia

τ = TENS. TG → agiscono $\parallel$ alla faccia

$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ ←

Ricordando inoltre le notazioni si ha che:

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ⟹ $\mathbf{T}$ è SIMMETRICA

in forma più compatta possiamo riscrivere le 6 EQ DEFINITE DI CAUCHY:

$$\begin{cases} \text{Traslazione}: & \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + f_k = 0 \qquad k = 1,2,3 \\ \text{Rotazione}: & \sigma_{ik} = \sigma_{ki} \qquad i,k = 1,2,3 \end{cases} \parallel \rightarrow$$ 6 equazioni in 9 incognite.

Per la risoluzione delle equazioni è necessario porre delle condizioni al contorno → la simm del tensore

↳ EQ. AI LIMITI → sono equazioni al contorno e servono per risolvere le cost. d'integrazione.

Si hanno: $F_A = (x,y,z)$ = forze di superficie e

$F_R(x,y,t)$ = forze di reazione vincolari.

Si può osservare che le forze di superficie non sono altro che il vettore Tensione Totale sulla superficie

$\vec{F} \equiv \vec{t_n}$

Se sono presenti vincoli devo considerare anche le reaz. vincolari oltre ad $\vec{F}$. Avrò $\vec{F} + \vec{R} = \vec{t_n}$

Posso scrivere le EQ. AI LIMITI:

$$\begin{cases} F_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ F_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ F_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases} = \mathbf{T} \cdot \vec{n}$$ in un punto particolare della superficie

(EQ. AI LIMITI)

Nel caso di bordo scarico in un punto nullo sup. $\vec{F} = 0$

(si ha uno stato di Tensione BIASSIALE (se considero $x \equiv \vec{n}$) ($\vec{n} = (1,0,0)$)

sempre

Per quindi questo stato di Tensione nelle sup. non caricate si ha che:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}=0 \\ \tau_{yx}=0 \\ \tau_{zx}=0 \end{cases} \Rightarrow T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{caso bordo scarico} \parallel \leftarrow$$

↓

lo stato di tensione nelle sup. non caricate è BIASSIALE

↓

vale per qualsiasi pto non caricato

Possiamo riassumere analiticamente:

$$\begin{cases} \vec{t_n} = T \cdot \vec{n} \\ \mathrm{div} T + f = 0 \\ T = T^T \\ \vec{F} = T \cdot \vec{n} \end{cases} \Bigg\| \leftarrow$$

TENSIONI NEI SOLIDI SYMM

↑

Altri casi interessanti sono i casi di simmetria ⇒ <u>CORPI SIMMETRICI</u>

Si possono avere condizioni di carico → simmetrico
→ antisimmetrico
→ generico (sempre decomponibile) <u>PSE</u>
in sim e anti sim.

mi metto con un cubetto a cavallo dell'asse di symm

<u>Caso 1</u>: ipotesi <u>CASO SIMMETRICO</u> (piano yz di symm)

Sul piano di simmetria di $\partial\Omega$ $T=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ e $\tau_{xy}=\tau_{xz}=0$

? ≠ da zero.

Se vado sulla frontiera dell'asse di simmetria $\tau_{xy}=\tau_{zy}=\sigma_{yy}=0$

Se su $\partial\Omega \in \not\Delta \Rightarrow T=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 328 9837745

Se c'è una forza sul bordo ⇒ se $\partial\Omega$ è caricata ognuna solo $F_y \neq 0$
e nel nostro caso $F_y = \sigma_{yy}$

E quindi avremo $T=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ dato da $\begin{cases} 0=\tau_{xy} \\ F_y=\sigma_{yy} \\ \tau_{zy}=0 \end{cases}$ EQ. AI LIMITI

In generale col caso simmetrico il Tensore degli sforzi si semplifica

<u>Caso 2</u>: ipotesi <u>CASO ANTISIMMETRICO</u>

Vogliamo ma l'equilibrio che l'antisimmetrico $\Longleftrightarrow \sigma_{xx}=0$

Con Sotto queste condizioni il Tensore degli sforzi sarà $T=\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Adesso mi porto sul bordo: sia $\partial\Omega$ e il piano antisimmetria e SCARICO

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Se è CARICATO in modo da rispettare l'antisimmetria $\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & F_x & \tau_{xz} \\ F_x & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Caso 3) solido con ∞ PIANI DI SIMMETRIA → Tutti gli ortogonali sono assi di simmetria

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$ → solido che ha un'unica componente di tensione, le Tensioni tangenziali non sono presenti. ||

RIFERIMENTO PRINCIPALE DELLE TENSIONI ⊗

$\vec{t_n} = T \cdot \vec{n}$ ⇒ di norma hanno direzioni diverse



Però se:

$$T = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{t_n} \parallel \vec{n}$$

$T \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} s_1 n_x \\ s_2 n_y \\ s_3 n_z \end{pmatrix}$ = non ci sono le Tensioni Tangenziali che ci spostano il vettore

trovo $\vec{t_n}$ tale che $\vec{t_n} \parallel \vec{n}$ cioè $\vec{t_n} = \lambda \vec{n}$

Entriamo soluzioni al problema della ricerca di $\vec{t_n} \parallel \vec{n}$?

$T \cdot \vec{n} = \lambda I \vec{n}$ — con I = matrice identità, λ = costante

$(T - \lambda I)\vec{n} = 0$ ← generica imposizione che $\vec{t_n} \parallel \vec{n}$

(coincide con la ricerca degli autovalori e corrispondenti autovettori di T

Quando $\lambda = s$ e suo $T - sI$ ↳ $\det(T - \lambda I) = 0$

EQ. CARATTERISTICA DI T

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - s & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - s \end{bmatrix} = 0$$ = calcolo il determinante con il metodo di Sarrus (matrici 3×3)

$$= (\sigma_{xx} - s)(\sigma_{yy} - s)(\sigma_{zz} - s) + 2\tau_{xz}\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_{yy} - s)\tau_{xz}^2 - (\sigma_{xx} - s)\tau_{yz}^2 - (\sigma_{zz} - s)\tau_{xy}^2 = 0$$

$$\Rightarrow -s^3 + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})s^2 - s(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2) + \det T = 0$$

$$\boxed{s^3 - \text{tr}(T)\, s^2 + \text{II}_T s - \det T = 0}$$

somma elementi diagonale

↳ minori di ordine II della matrice T

$s^3 + As^2 + Bs + C$

$\left\| \begin{matrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{matrix} \right\|$