MECCANICA DEI SOLIDI

01/03/17

prof. Sassu Mauro

corso collegato a meccanica delle strutture
(prima unite in TECNICA DELLE COSTRUZIONI)
SCIENZA

I^a parte: TEORIA DELL'ELASTICITÁ DEI SOLIDI TRIDIMENSIONALI (3D) (Sassu)
II^a parte: APPLICAZIONE SPECIFICHE AI SOLIDI (Giresini)

↑ in strutture si trattavano le TRAVI

Problema:
1) segno delle sollecitazioni é importante
2) i materiali si deformano in seguito alle sollecitazioni subite
3) A parità di materiale → cambia forma ⇒ qualità del materiale
4) ∃ segni di sollecitazioni importanti che cambiano forma al solido (problema di instabilità)
5) sensibilità alle imperfezioni del solido

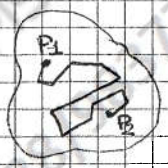
Def.

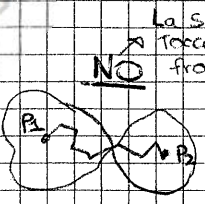
- MECCANICA = studio del moto
  - CINEMATICA = descrizione geometrica del moto (spostam., velocità, accelerazioni)
  - STATICA = cause di ASSENZA del moto (EQUILIBRIO) F=0
  - DINAMICA = cause di PRESENZA del moto F=ma

↑ Noi non studieremo la dinamica!

- SOLIDI:

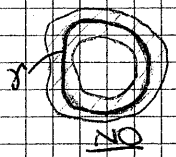
- Corpi continui → se ∀ coppia (P_1, P_2) interni al corpo, ∃ una spezzata di punti interni che li unisce.





- corpi monoconnessi
  → sono corpi senza buchi
  → se ∀ γ chiusa ∈ al corpo é possibile mandare $\lim |\gamma| \to \emptyset$
  (se possono collassare in modo che contengano punti interni)





← corpo pluriconnesso o cellulare (con buchi)

Aspetti da studiare:

1) EQUILIBRIO = uguaglianza tra forze (il corpo non si muove)

2) CONGRUENZA = assenza di lesioni e compenetrazioni
(il solido si deforma senza fratture / punti prima vicini che poi si allontanano)
(si tratta di spostamenti e deformazioni)

3) LEGAME COSTITUTIVO = dipendenza dal materiale o legame forze-deformazioni
→ modo in cui risponde il materiale alle sollecitazioni in base al materiale costituente.

Libri di testo:
→ MECCANICA DEI SOLIDI: TALERCIO ↓
→ Scienza delle costruzioni: FROLI ↓
→ TRALLI-GAMBAROTTA-NUNZIANTE

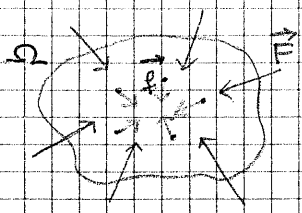
Esame: ORALE (esercizi + teoria)

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 98377 65

Analisi della tensione (1° argomento)

↓

Affronta il problema dell'equilibrio



Def. TENSIONE = $\frac{\text{forza}}{\text{lunghezza}^2\ (\text{superficie})} = \frac{F}{(\ell^2)\ \delta A}$ $[Pa] = \left[\frac{N}{mm^2}\right]$

Principio di Eulero

"Se un corpo è in equilibrio, ogni sua parte è in equilibrio"

Applichiamo su Ω una serie di FORZE:

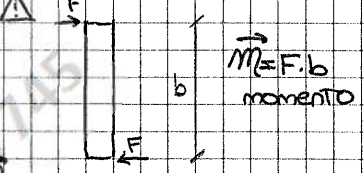
→ FORZE DI CONTATTO (σ DI SUPERFICIE) $\vec{F}$ (F/L^2) = sono forze su unità di superficie (relative alla zona della frontiera) (agisce su $\partial\Omega$ frontiera)

→ FORZE A DISTANZA (o DI VOLUME) $\vec{f}$ (F/L^3) = forze su unità di volume (forze associate a punti interni, agiscono su Ω) es. forza peso (densità)

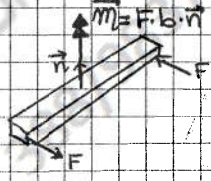
Scriviamo l'equazione di EQUILIBRIO (BILANCIO):

1) $\int_\Omega \vec{f}\,dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}\,dS = \emptyset$ condizione di EQUILIBRIO alla TRASLAZIONE

eq. alla traslazione ma non alla rotazione →



In 3D: $\vec{m} = F \cdot b \cdot \vec{n}$

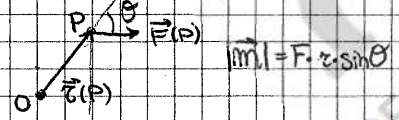


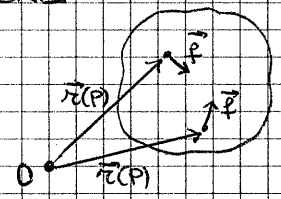
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2) $\int_\Omega \vec{f}(P) \wedge \vec{r}(P)\,dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}(P) \wedge \vec{r}(P)\,dS = 0$

prodotto vettoriale

EQUILIBRIO alla ROTAZIONE





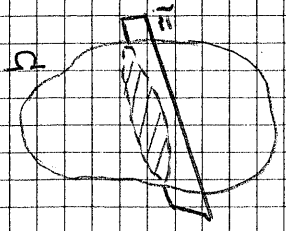
Si possono riassumere in:

$\vec{F} = \emptyset$ RISULTANTE FORZE

$\vec{m}_o = \emptyset$ MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AD UN POLO

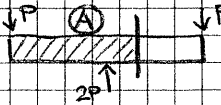
> delle forze ESTERNE

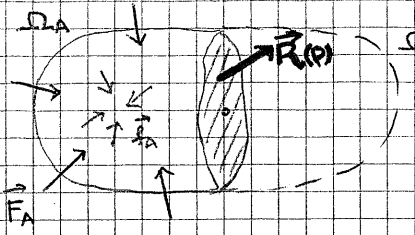
Adesso applichiamo il Principio di Eulero:



- Divido il solido in 2 parti, effettuando un taglio con un piano Π.
- Isolo una delle 2 parti e voglio che sia ancora in EQUILIBRIO.

In generale non è detto che una parte di solido diviso è in equilibrio.





$\vec{F}_A \neq \emptyset$

N.B. Non è detto che tutte le forze di Ω_A siano in equilibrio, ma per il Principio di Eulero devono esistere delle forze dette forze interne.

$$\vec{R}_A = \int_\Pi \vec{R}\, dS$$

$$\vec{M}_A = \int_\Pi \vec{R}(P) \times \vec{r}(P)\, dS$$

$\vec{R}(P)$ = TENSIONI = $\frac{\text{forze interne di superficie}}{(F/L^2)}$ per tenere in equilibrio punti del corpo.
(Sono grandezze vettoriali)

Ritorniamo alle equazioni di equilibrio: (forze esterne)

$$(1)\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \emptyset \\ \vec{m}_O = \vec{m}_{A_O} + \vec{m}_{B_O} = \emptyset \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

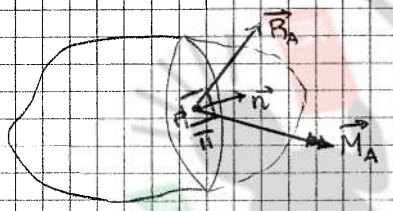
Se separo il corpo ho:

$$(2)\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{R}_A = \emptyset \\ \vec{m}_{A_O} + \vec{M}_{A_O} = \emptyset \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A = \vec{F}_B \\ \vec{M}_{A_O} = \vec{m}_{B_O} \end{cases}$$

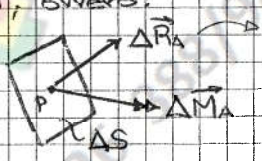
(forze interne ed est.)

CALCOLO DELLE TENSIONI

Introduciamo ora il Vettore TENSIONE TOTALE $\vec{t}_n(P)$



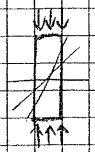
Consideriamo un intorno di un generico punto P $\in \Pi$, ovvero:



$$\vec{t}_m(P) = \lim_{|\Delta S| \to \emptyset} \frac{\Delta \vec{R}_A}{|\Delta S|}$$

vettore tensione TOTALE in P rispetto ad m

N.B. • La tensione è un VETTORE che dipende da P e da $\vec{n}$, ovvero dipende dal punto e dalla superficie dove la calcolo.
È una funzione di 6 variabili scalari: P (x, y, z)
$\vec{n}$ (n_x, n_y, n_z)



Riassumendo: $\vec{t}_n(P, \vec{n})$

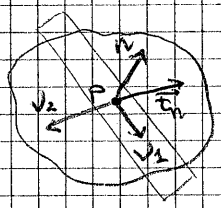
Vettore tensione totale: forza interna di contatto necessaria per l'equilibrio parziale del corpo, dipendente dal punto P e dalla normale esterna $\vec{n}$ rispetto alla quale è orientata la superficie interna.
Esso quantifica le forze interne di superficie.

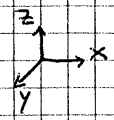
(l'area è la misura della superficie)

Ipotesi:

$$\lim_{|\Delta S| \to 0} \frac{\Delta \vec{M}_A}{|\Delta S|} \overset{\text{IMPONIAMO}}{=} \emptyset$$

$\neq \emptyset$ SOLIDI DI COSSERAT → Anche la trave
O POLARI





$$\vec{t}_n = \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix}$$

DECOMPOSIZIONE nel RIFERIMENTO GLOBALE XYZ

n, v_1, v_2 = Terna mobile con $\vec{n} \perp$ sup. $v_1, v_2 \parallel$ sup.

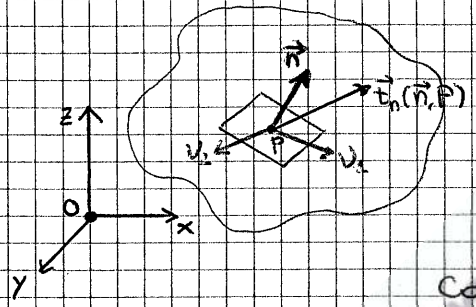
$$\vec{t}_n = \begin{pmatrix} \vec{t}_n \cdot \vec{v}_1 \\ \vec{t}_n \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{t}_n \cdot \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{nv_1} \\ \tau_{nv_2} \\ \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

DECOMP. NEL RIF. LOCALE (MOBILE) dove:

τ_{nv_1} = tensione tangenziale in direzione v_1
τ_{nv_2} = // // v_2
σ_{nn} = tensione normale $[F/L^2]$

02/03/17

Riassunto:



Definiamo:

Stato di TENSIONE in un punto $P \in \Omega$ è l'insieme di tutti i $\vec{t}_n$ al variare di $\vec{n}$ in P.

N.B. Non ha senso chiedere quanto vale la tensione in un punto, ma bisogna chiedersi quanto vale lo stato di tensione in un punto.

Conviene decomporre in:

$$\vec{t}_n \equiv \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau_{nv_1} \\ \tau_{nv_2} \\ \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Rif. GLOBALE Rif. LOCALE

$$\sigma_{nn} = \vec{t}_n \cdot \vec{n} = t_{nx} \cdot n_x + t_{ny} \cdot n_y + t_{nz} \cdot n_z$$

$$\tau_{nv} = \vec{t}_n \cdot \vec{v} = t_{nx} \cdot v_x + t_{ny} \cdot v_y + t_{nz} \cdot v_z$$

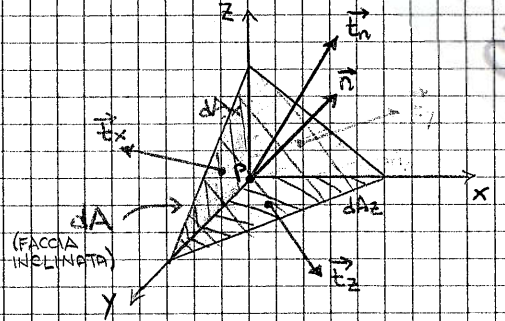
$$\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \equiv \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Abbiamo detto che $\vec{t}_n$ dipende da 6 variabili:

$$\vec{t}_n = \vec{t}_n(n_x, n_y, n_z, x, y, z)$$

ma possiamo semplificare queste variabili con il:

Teorema del TETRAEDRO di CAUCHY



Prendo un tetraedro infinitesimo. Voglio sapere lo stato di tensione su P.

Ho 4 versori tensione totale:

$\vec{t}_n$ = versore sulla generica faccia inclinata $\vec{n}$

$\vec{t}_{\otimes}$ = versore sulla faccia (inclinata risp.) $\perp$ asse $\otimes$ (diretto lungo x)

$\vec{t}_y$ = versore sulla faccia $\perp$ asse y

$\vec{t}_z$ = versore sulla faccia $\perp$ asse z

RACCOMANDAZIONE:

LE TENSIONI NON SI SOMMANO MAI, LE FORZE SI SOMMANO!

Procediamo

↓

MASTER COPY
Tel. 050 0312126
Cell. 328 9837745

▶ Scriviamo l'equilibrio nelle varie direzioni:

$$(x)\ (\cdot n_x)\quad t_{nx}\,dA - t_x n_x\,dA_x - t_y\cdot n_x\cdot dA_y - t_z\cdot n_x\cdot dA_z = \emptyset$$

← questa è una somma di forze infinitesime, non tensioni ($F = P\cdot A$)

$t_n \cdot n_x$ (decomposizione tensione t_n su x)

PROIEZ. = PROD. SCAL.

$$\begin{cases} dA_x = n_x\cdot dA \\ dA_y = n_y\cdot dA \\ dA_z = n_z\cdot dA \end{cases}$$

I 3 triangolini sono le proiezioni dell'area dA su x, y, z (quindi prodotto scalare di dA e della normale)

$$t_{nx}\cdot \cancel{dA} - t_x n_x^2 \cancel{dA} - t_y\, n_x n_y \cancel{dA} - t_z\cdot n_x n_z\cdot \cancel{dA} = \emptyset$$

Osservando che:

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{t_x}\cdot n_x = \begin{pmatrix} t_x \\ t_x \\ t_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(t_x\cdot 1 + t_x\cdot 0 + t_x\cdot 0\right) = \sigma_{xx}$$

$$\vec{t_y}\cdot n_x = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tau_{yx} \quad ; \quad \vec{t_z}\cdot n_x = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tau_{zx}$$

$$\boxed{t_{nx} = t_x\cdot n_x^2 + t_y\, n_x n_y + t_z\, n_x n_z} \quad (1)$$

$$(y)\ (\cdot n_y)\quad t_{ny}\cdot dA - t_x n_y\, dA_x - t_y\cdot n_y\cdot dA_y - t_z\cdot n_y\cdot dA_z = \emptyset$$

$$\boxed{t_{ny} = t_x\, n_y n_x + t_y\, n_y^2 + t_z\, n_y n_z} \quad (2)$$

$$(z)\ (\cdot n_z)\quad \boxed{t_{nz} = t_x\cdot n_z n_x + t_y\, n_z n_y + t_z\cdot n_z^2} \quad (3)$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} (1)\ t_{nx} = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ (2)\ t_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \\ (3)\ t_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases}$$

Sostituendo in σ_{nn} e τ_{nv} (scritte prima), si ha:

$$\sigma_{nn} = \left(\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z\right)\cdot n_x + \left(\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z\right)\cdot n_y + \left(\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z\right)\cdot n_z$$

↓ Raggruppo gli addendi: (9)

$$= \sigma_{xx} n_x^2 + \sigma_{yy} n_y^2 + \sigma_{zz} n_z^2 + \left(\tau_{yx} + \tau_{xy}\right) n_x n_y + \left(\tau_{xz} + \tau_{zx}\right) n_x n_z + \left(\tau_{yz} + \tau_{zy}\right) n_y n_z$$

↓ in forma compatta (matriciale):

$$\sigma_{nn} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \underbrace{[T]}\{\vec{n}\}\cdot\{\vec{n}\}$$

SCALARE

esce fuori dalla dipendenza di T

$$\vec{t_n} = [T]\{\vec{n}\}$$

→ con questo risultato posso dire che $\vec{t_n}$ dipende linearmente da n, quindi per conoscere lo stato di tensione in P mi basta conoscere la matrice T. ⇒ Una funzione in numerose variabili, diventa una matrice (T)!

MATRICE che descrive le tensioni nel punto P

T = Tensore degli sforzi

→ operatore che lavora in forma quadratica

MASTER COPY
Tel. 050 831211 26
Cell. 388 9837745