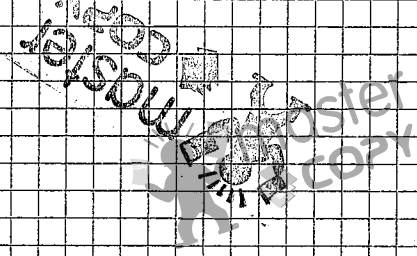
MECCANICA DEI SOLIDI

master copy



PROF: GIRESINI, SASSU, ALESSI

ANNO 2018/2019

SCHEMA DEL PROBLEMA DI DE SAINT-VENANT: DA PAGINA 24

INTRODUZIONE AL PROBLEMA: IPOTESI SULLA GEOMETRIA, IPOTESI SUL MATERIALE, IPOTESI SULLE FORZE → SCOPO DEL PROBLEMA

↓

TIPOLOGIA DI RISOLUZIONE: METODO SEMI-INVERSO → SEMPLIFICAZIONE DELLE FORMULE CON IPOTESI DI DE SAINT VENANT

↓

RISOLUZIONE IN TERMINI DI TENSIONE: $RotRot\,\underline{\underline{E}} = 0$ → $\underline{\underline{\sigma}} = a + \underline{b}\,y + \underline{d}\,(z-L)(y-y_G)$

↓ 6 COSTANTI DI INTEGRAZIONE $a, \underline{b}, \underline{d}, e$

$$\begin{cases} rot\,\underline{t} = -\frac{N}{EJ_y}(\underline{a}\times\underline{d})\underline{y} + 2e \\ div\,\underline{\underline{\tau}} + \underline{f}' = 0 \\ \underline{\underline{\tau}}\,\underline{n} = 0 \end{cases}$$

↓

COLLEGAMENTO FORZE-TENSIONI: DALLA DEFINIZIONE DI SISTEMA AUTOEQUILIBRATO

$N(z), \underline{M}(z), \underline{Q}(z), M_t(z)$ → RISULTANTI INTERNE, EST. DA CUI OTTENGO IN TERMINI DI CDS LE RELAZIONI IN $(z=0)$ E $(z=L)$

$$\int \underline{f}, \int \underline{x}\wedge\underline{f}, \quad \underline{x} = \underline{y} + z\underline{g}, \quad \underline{f} = \underline{g} + \underline{h}\underline{g}, \quad \int \underline{t}\underline{g} + \int \underline{y}\wedge\underline{t}\underline{a}$$

con $\underline{t}\underline{g} = \underline{\sigma}\underline{g} + \underline{\tau}$

$\int_{\beta z} \underline{f} = \int_{\beta\theta} \underline{\tau} + \underline{\sigma}\underline{g}$

$\int \underline{y}\wedge\underline{f} = \int \underline{y}\wedge(\underline{\tau} + \underline{\sigma}\underline{g})$

FORZE LUNGO $\underline{g}$
FORZE $\perp$ ad $\underline{g}$
MOMENTI LUNGO $\underline{g}$
MOMENTI $\perp$ ad $\underline{g}$

COLLEGAMENTO CDS - COSTANTI DI INTEGRAZIONE:

$$\begin{cases} N(z) = aA + \underline{b}\,S \\ \underline{Q}(z) = \underline{d}\,J_G \\ a\times\underline{M}(z) = \underline{b}\,J + a\,\underline{S} \\ M_t = J_t\,c + \int \underline{y}\wedge\underline{\tau}\,d \end{cases}$$

SOTTOPROBLEMA ①

↓

DALLA LEGGE $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \chi = \frac{\tau}{G}$

SIGNIFICATO FISICO DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE:

$$\begin{cases} \varepsilon_G = \frac{a}{E} & \text{ESTENSIONE UNIFORME} \\ \underline{\kappa} = \frac{(a\times\underline{b})}{E} & \text{FLESSIONE UNIFORME} \\ \underline{\kappa}' = -\frac{(a\times\underline{d})}{E} & \text{FLESSIONE NON UNIFORME} \\ \kappa_t = \frac{e}{G} & \text{TORSIONE UNIFORME} \end{cases}$$

CARATTERISTICHE CINEMATICHE (TRASLAZIONE, ROTAZIONE, ALLUNGAMENTO)

SPOSTAMENTI → $du = \varepsilon_G\,dz$; $d\underline{\varphi} = \underline{\kappa}(z)\,dz$; $d\theta = \kappa_t\,dz$

RAGGIO CURVATURA $R = \frac{1}{\kappa(z-L)}$

LEGAME $\sigma, \varepsilon, N, M$

SOTTOPROBLEMA ②: TENSIONI | FORZE ESTERNE:

$a, \underline{b} \neq 0, \quad \underline{d}, e = 0$ → STATO DEFORMATIVO DELLA PRESSOFLESSIONE

$$\begin{cases} N = EA\,\varepsilon_G \\ M_1 = EJ_2\,\kappa_1 \\ M_2 = EJ_1\,\kappa_2 \end{cases}$$

→ PRESSOFLESSIONE

$$\begin{cases} N(z), \underline{M}(z) \text{ COSTANTI ALLE BASI} \\ \sigma \text{ UNICA TENSIONE } (\tau \equiv 0 \text{ IN OGNI SEZ}) \end{cases}$$

↓ RIMANDO A SISTEMI DI FORZE → σ DI PRESSIONE

$\underline{d}, e \neq 0$ FORMULA DI NAVIER: $\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_2}{J_1}y_1 + \frac{M_1}{J_2}y_2$ → NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA

↓

ASSE NEUTRO: $\sigma, \varepsilon = 0$ (LUOGO DEI PUNTI) → INTERCETTE

↓

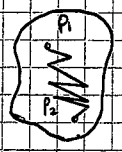
TAGLIO + TORSIONE: FORMULA DI JOURAWSKY $\tau_J = \frac{A^*}{e^*}J_G^{-1}\underline{Q}\,(y_G - y_G^*)$

INTRODUZIONE ALLA MECCANICA DEI SOLIDI: MODULO I:

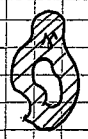
IN GENERALE UN SOLIDO È UN CORPO GENERICO, INDICO CON $\partial\Omega$ (DI OMEGA) LA FRONTIERA OVVERO IL CONTORNO DI Ω

CORPO CONTINUO: "UN CORPO È CONTINUO SE FISSATI SUL CORPO P_1 E P_2, ∃ ALMENO UNA LINEA SPEZZATA APPARTENENTE AL CORPO, CHE LI CONGIUNGE"

(È UNA SPEZZATA DI PUNTI INTERNI)



CORPO MONOCONNESSO: "I CORPI MONOCONNESSI SONO CORPI SENZA BUCHI", E SONO MONOCONNESSI SE ∀ LINEA CHIUSA γ € AL CORPO È POSSIBILE MANDARE $\lim |\gamma| \to \phi$"





(SE IL CORPO PUÒ COMASSARE SU SE STESSO IN MODO CHE CONTENGA TUTTI I PUNTI) SE NON È COSÌ: ⟶ CORPO PLURICONNESSO

SIMBOLOGIA:

1) ∂A = SUPERFICIE DI TAGLIO
2) $\vec{R}$ = RISULTANTE DELLE TENSIONI
3) $\vec{M}$ = RISULTANTE DEI MOMENTI
4) $\vec{t}_n$ = VETTORE TENSIONE NORMALE → σ_{nn} = COMPONENTE NORMALE; → τ_{nv} = COMPONENTE TANGENZIALE
5) $\hat{n}$ = VERSORE ⊥ AL PIANO
6) $\hat{v}$ = VERSORE ∥ AL PIANO
7) τ_{AB} = TENSIONE → A: AGENTE NEL PIANO ⊥ A; → B: DIRETTO LUNGO B
8) $\tau_{n,n} = \sigma_n$ = TENSIONE NORMALE AL PIANO
9) τ = TENSIONE TANGENTE AL PIANO
10) Δu_A = SPOSTAMENTO
11) Δ_A = VARIAZIONE DI SPOSTAMENTO O DILATAZIONE LINEARE
12) ε_A = DEFORMAZIONE ASSIALE
13) γ = SCORRIMENTO ANGOLARE
14) E, ν, G = COSTANTI TECNICHE
15) $\Delta L_n^* = \Delta L_n(1+\varepsilon_n)$ DEFORMAZIONE NEL CASO DEI PICCOLI SPOSTAMENTI
16) ψ = DENSITÀ DI ENERGIA, Φ ENERGIA DI DEFORMAZIONE

Master Copy

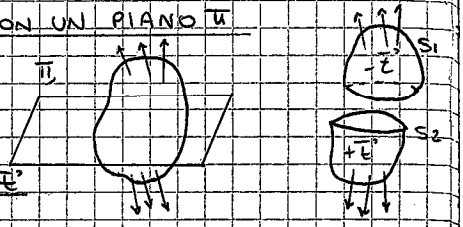
ANALISI DELLA TENSIONE:

IN GENERALE VIENE AFFRONTATO IL PROBLEMA DELL' EQUILIBRIO IN SEGUITO ALL' APPLICAZIONE DI FORZE ESTERNE ANALIZZANDO LO STATO TENSIONALE

TENSIONE SECONDO CAUCHY: $T = \frac{F}{\ell^2} = [Pa]$

PRINCIPIO DI EULERO: "UN CORPO È IN EQUILIBRIO QUANDO OGNI SUA PARTE È IN EQUILIBRIO"

QUESTO SIGNIFICA CHE DATO UN CORPO Ω SE LO SEZIONASSI CON UN PIANO Π SI ANDREBBERO A FORMARE DUE CORPI S_1, S_2 I QUALI PERÒ NON SONO IN EQUILIBRIO, PER RIPORTARLI ALLO STATO INIZIALE DOVREI CONSIDERARE LE TENSIONI INTERNE $+\vec{t}, -\vec{t}'$



IPOTESI PER LA TENSIONE:

1) $\exists\, dA \in S_1, S_2$ AREA INFINITESIMA

2) $\exists\, \vec{R}$ DI $\vec{t}$ IN DI S_1, S_2 $\Rightarrow \lim_{dA \to 0} \frac{dR}{dA} = \vec{t_n}$ VETTORE TENSIONE NORMALE SECONDO CAUCHY

3) $\exists\, \vec{M}$ DI $\vec{t}$ IN S_1, S_2

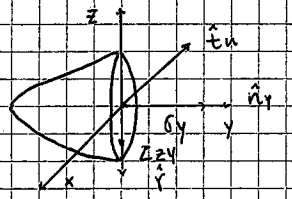
4) $\exists\, t$ DISTRIBUITO IN MANIERA CONTINUA SULLA SUPERFICIE DI TAGLIO $\Rightarrow \lim_{dA \to 0} \frac{dH}{dA} = 0$

QUESTE SONO LE IPOTESI VALIDE PER IL SOLIDO DI CAUCHY

INVECE SI DICE SOLIDO DI COSSERAT: "UNA STRUTTURA CRISTALLINA PER CUI $\lim_{dA \to 0} \frac{dH}{dA} \neq 0$

PER QUANTO RIGUARDA LA TENSIONE $\vec{t_n}$ QUESTA HA COMPONENTE NORMALE σ E TANGENZIALE τ

E VALE CHE $\vec{t_n} = t_n(P, \hat{n})$ CON: $P = (x,y,z)$ PUNTO, $\hat{n}$ NORMALE ALLA SEZIONE



$\begin{cases} \hat{n} = \text{VERSORE} \perp S \rightarrow \text{CON COSENI DIRETTORI} \begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{matrix} \\ \hat{\gamma} = \text{VERSORE} \parallel S \end{cases}$

FORZE E CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

CONDIZIONI SUFFICIENTI E NECESSARIE PER L'EQUILIBRIO SONO:

1) $\boxed{\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{V} = 0}$ CONDIZIONE DI EQUILIBRIO TRASLAZIONALE

2) $\boxed{\int_{\partial\Omega} (\vec{r_F} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{s} + \int_{\Omega} (\vec{r_f} \wedge \vec{f}) \, d\vec{V} = 0}$ CONDIZIONE DI EQUILIBRIO ROTAZIONALE

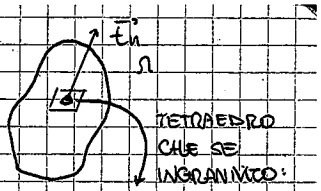
CON: $\begin{cases} \vec{F} = \text{FORZE DI SUPERFICIE} = [F/L^2] \\ \vec{f} = \text{FORZE DI VOLUME} = [F/L^3] \\ \vec{r}_{F,f} = \text{RAGGIO VETTORE DI } \vec{F}, \vec{f} = [m] \end{cases}$

TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY:

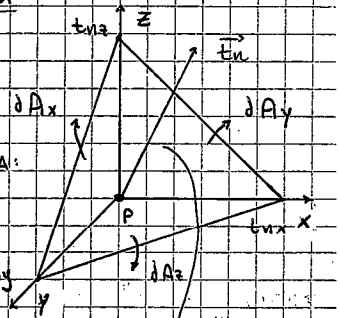
SIA $\vec{t_n} = t_n(P, \hat{n})$ VETTORE TENSIONE SECONDO CAUCHY CON LE IPOTESI

IL TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY PERMETTE DI DEFINIRE IL

TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{T}}$ E DI STABILIRE LA RELAZIONE TRA $\underline{\underline{T}}, \vec{t_n}, \hat{n}$



"QUALE RELAZIONE ESISTE TRA IL VETTORE SFORZO t_n E LA GIACITURA DELLA SUPERFICIE SU CUI AGISCE?" ← QUESTA È LA TESI



SI PUÒ QUINDI DIMOSTRARE CHE IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{T}}$ HA FORMA:

"DESCRIVE IN MODO COMPLETO LO SFORZO IN UN GENERICO SOLIDO ("È SOLO FUNZIONE DELLA POSIZIONE")"

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$ È UN TENSORE A 9 COMPONENTI

"$\vec{t_n}$ HA ORIGINE IN P E DUNQUE PROIETTARLO LUNGO GLI ASSI"

LE COMPONENTI RAPPRESENTANO LO STATO TENSIONALE

CON IL TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY SI DIMOSTRA CHE, NOTI $\underline{\underline{T}}, \hat{n}$, VALE LA RELAZIONE

$$\boxed{\underline{\underline{T}} \cdot \hat{n} = \vec{t_n}}$$ DIMOSTRAZIONE (1)

"CI PERMETTE DI DEFINIRE $\vec{t_n}$ UNA VOLTA NOTI IL TENSORE $\underline{\underline{T}}$ E IL VERSORE DELLA NORMALE AL PIANO"

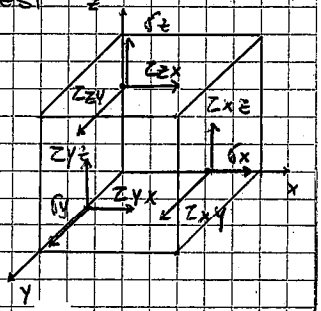
↓ DEFINIZIONE DELLA TESI

SPIEGAZIONE DEL TENSORE DEGLI SFORZI E SIGNIFICATO FISICO:

IL TENSORE DEGLI SFORZI È UNA MATRICE 3×3 (A 9 COMPONENTI)

E SI PUÒ DIMOSTRARE LA SUA SIMMETRIA PER CUI

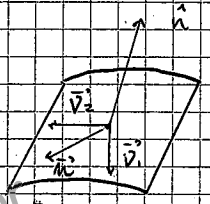
$$\boxed{\tau_{AB} = \tau_{BA}}$$ DIMOSTRAZIONE (2) ⇒ SIMMETRIA ⇒ 6 COMPON. INDIPEND.



E CI DICE CHE "LA RISULTANTE $\vec{t_n}$ SU QUALSIASI PUNTO È DEFINITA UNIVOCAMENTE, UNA VOLTA RIFERITI GLI SFORZI AD UNA GIACITURA CARTESIANA"

IN FIGURA C'È IL SIGNIFICATO FISICO DEL TENSORE DEGLI SFORZI

QUESTO TEOREMA CONSENTE DI DEFINIRE IN OLTRE:



$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{t_n} \cdot \hat{n} \\ \tau_{n v_1} = \vec{t_n} \cdot \vec{v}_1 \\ \tau_{n v_2} = \vec{t_n} \cdot \vec{v}_2 \\ \tau_{nm} = \vec{t_n} \cdot \vec{m} \end{cases}$$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ SONO VERSORI ARBITRARI E ⊥ A $\hat{n}$ SUL PIANO DI TAGLIO

CON: $\vec{m}$ GENERICO VERSORE TANGENTE AL PIANO, $\vec{v}_1^{(n_i)}, \vec{v}_n$ VERSORI ORTONORMALI TRA AL PIANO

ED È POSSIBILE IN OLTRE DIMOSTRARE CHE:

$$\boxed{\sigma_{nn} = \sum_{i,k}^{1} \sigma_{i,k}\, n_i\, n_k}$$

$$\boxed{\tau_{n,m} = \sum_{i,k}^{1} \sigma_{i,k}\, n_i\, m_k}$$

$$\boxed{\tau_{n,v} = \sum_{i,k}^{1} \sigma_{i,k}\, n_i\, v_k}$$ DIMOSTRAZIONE (3 B)

n_a

$$\begin{cases} \sigma_{n,n} = \underline{\underline{T}}\, \underline{n}\, \underline{n} \\ \sigma_{v,v} = \underline{\underline{T}}\, \underline{v}\, \underline{v} \\ \tau_{n,v} = \underline{\underline{T}}\, \underline{n}\, \underline{v} \end{cases}$$

