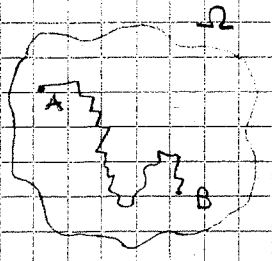
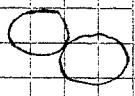
05-03-2013

MECCANICA DEI SOLIDI



Ω = CORPO CONTINUO E INTERNAMENTE CONNESSO

MONOCONNESSO È UN CORPO SENZA "BUCHI"

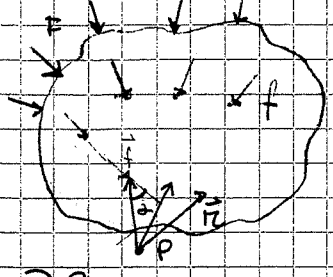


NON SOLO CORPI INTERNAMENTI CONNESSI

FORZA: COSA CHE PROVOCA UNA VARIAZIONE DEL CORPO

FORZE? f = FORZE A DISTANZA O DI VOLUME $[F/L^3]$ } FORZE ESTERNE

F = FORZE DI SUPERFICIE $[F/L^2]$ }



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\partial\Omega$ = FRONTIERA DI UN CORPO

VOGLIAMO METTERCI NELLA CONDIZIONE DI STATICA O DI EQUILIBRIO

UN SOLIDO IN EQUILIBRIO

$$\int_{\Omega} \vec{f}\, dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}\, ds = 0$$

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE DI Ω

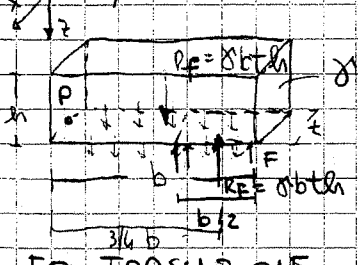
SEGUIAMO UN PUNTO GENERICO SCELTO NELLO SPAZIO P

$$\int_{\Omega} \vec{f} \wedge \vec{r}\, dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \wedge \vec{r}\, dS = 0$$

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE

IL MOMENTO $|\vec{M}| = f \cdot r \cdot \sin\alpha$

ESEMPIO:



$\gamma = t$

POSSIAMO $F = \dfrac{\gamma btl}{t\, b/2}$

EQ. TRASLAZIONE $\int_{\Omega} f\,dV + \int_{\partial\Omega} F\,ds = \gamma \int_{\Omega} dV - F \int_{\partial\Omega} dS = \gamma btl - 2\gamma l \cdot t \cdot \frac{b}{2} = 0$

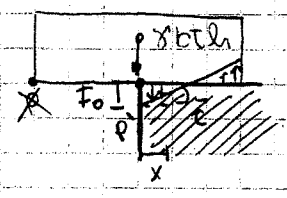
EQ. ROTAZIONE SCELTO UN PUNTO P

$$\int_{\Omega} \vec{f} \times \vec{r}\, dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \times \vec{r}\, dS = R_f \cdot b_f + R_F \cdot b_F = \gamma b t h \cdot b/2 \cdot \gamma b t h \cdot \frac{3}{4} b = \circledast$$

DALLA MECCANICA RAZIONALE POSSO CALCOLARE IL MOMENTO DELLA RISULTANTE

$$\circledast \quad \gamma b^2 t h \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{\gamma b^2 t h}{4} \neq 0$$

ESEMPIO: CALCOLARE F_0 E x TALI DA AVERE EQUILIBRIO



$F(x) = F_0 + c \cdot x$

EQUILIBRIO $\gamma b t h = \int_{\partial\Omega} F\, ds = t \int_0^{b/2} (F_0 + cx)\, dx \Rightarrow$

TRASLAZIONE

$$\Rightarrow \gamma b t h = t \left[F_0 x + c \frac{x^2}{2}\right]_0^{b/2}$$

$$\boxed{\gamma b h = F_0 b/2 + c b^2/8}$$

EQ. ROTAZIONE $\int_{\Omega} \vec{f} \times \vec{r}\, dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \times \vec{r}\, ds = \gamma b t h \cdot 0 + t \int_0^{b/2} (F_0 + cx) x\, dx = 0$

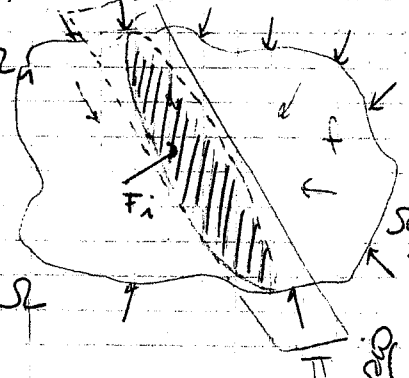
$$\left[F_0 \frac{x^2}{2} + c \frac{x^3}{3}\right]_0^{b/2} = 0$$

$$\begin{cases} \gamma b h = F_0 \frac{b}{2} + c \frac{b^2}{8} \\ F_0 \frac{b^2}{8} + c \frac{b^3}{24} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\gamma h = F_0 + c b/4 \\ F_0 + c \frac{b}{3} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{F_0 = -\frac{cb}{3}}$$

$2\gamma h = -\frac{cb}{3} + \frac{cb}{4} \Rightarrow cb\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{cb}{12}$

$$-\frac{2\gamma h \cdot 12}{b} = c$$

DAL PUNTO DI VISTA TRIDIMENSIONALE



PRINCIPIO: SE Ω È IN EQUILIBRIO, QUALSIASI SOTTOINSIEME È IN EQUILIBRIO

⇓

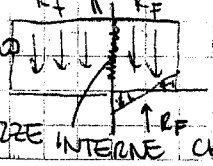
F È POSSIBILE SOLO SE ESISTONO LE FORZE INTERNE

EQUILIBRIO

$$\int_{\Omega_1} f\, dV + \int_{\partial\Omega_1} F\, ds + \int_{\pi} F_i\, ds = 0 \qquad \text{TRASLAZIONE}$$

$$\int_{\Omega_1} F \times r\, dV + \int_{\partial\Omega_1} F \times r\, ds \int_{\pi} F_i \times r\, ds = 0 \qquad \text{ROTAZIONE}$$

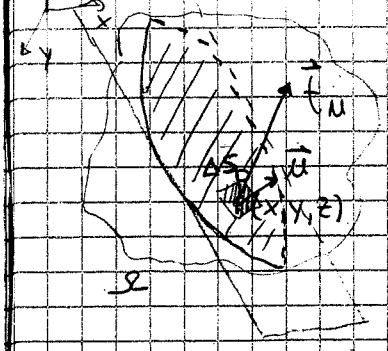
ESEMPIO PRECEDENTE



SE LO TAGLIO

FORZE INTERNE CHE SONO SOLO FORZE DI SUPERFICIE

ANALISI DELLA TENSIONE



Π IDENTIFICATO DA $\vec{\mu}$

NOTA LA RISULTANTE $\vec{R}_i$ E IL MOMENTO RISULTANTE $\vec{M}_i$ DELLE FORZE INTERNE

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$\Rightarrow \Delta\vec{R}_i$ AL VARIARE $\Delta\vec{M}_i$ DELLA SUPERF. ΔS

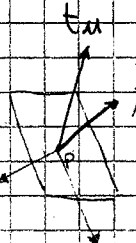
$$\lim_{|\Delta S|\to 0} \frac{\Delta \vec{R}_i}{|\Delta S|} \overset{DEF}{=} \vec{t}_\mu$$ VETTORE TENSIONE TOTALE IN P SECONDO $\vec{\mu}$

$$\lim_{|\Delta S|\to 0} \frac{\Delta \vec{M}_i}{|\Delta S|} = \vec{0}$$ $\neq 0$ SOLIDI POLARI O DI COSSERAT

PER IPOTESI (VALE PER I SOLIDI ISOTROPI)

LA TENSIONE È UNA QUANTITÀ VETTORIALE, $\vec{t}_\mu$ PUÒ AVERE UNA DIREZIONE QUALUNQUE, NON DEVE ESSERE PER FORZA PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE

N.B IL SOLIDO TRAVE PUÒ ESSERE CONSIDERATO UN SOLIDO A UNA DIMENSIONE POLARE



$\vec{t}_\mu = \vec{t}_\mu(P, \vec{\mu})$ $\vec{t}_\mu$ È IN FUNZIONE SIA DI P E DA $\vec{\mu}$

SE DECOMPONGO $\vec{t}_\mu$ NEL RIFERIMENTO LOCALE $(\vec{\mu}; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$

$$\vec{t}_\mu = (t_{\mu,\mu}; t_{\mu v_1}; t_{\mu v_2}) \equiv (\sigma_{\mu\mu}; \tau_{\mu v_1}; \tau_{\mu v_2})$$

$\sigma_{\mu\mu}$: TENSIONE NORMALE; $\tau_{\mu v_1}$, $\tau_{\mu v_2}$: TENSIONI TANGENZIALI

$$\begin{cases} \sigma_{\mu\mu} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{\mu} \\ \tau_{\mu v_1} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{v}_1 \\ \tau_{\mu v_2} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

- ESEMPIO

$\vec{t}_\mu = (100\ MPa; 50\ MPa; 0)$

TERNO DI VERSORI TRA LORO ORTOGONALI

$1\ MPa = 1\ N/mm^2$

$\vec{t}_\mu$ AGISCA SU UNA NORMALE ESTERNA $\vec{\mu} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$\vec{v}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ $\vec{v}_2 = (0; 0; 1)$

$$\sigma_{\mu\mu} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{\mu} = 100\frac{\sqrt{2}}{2} + 50\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot 0 = 75\sqrt{2}\ MPa = 106.06\ MPa$$

$$\tau_{\mu\nu_1} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{\nu}_1 = 100\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 50\frac{\sqrt{2}}{2} = -25\sqrt{2}\ MPa$$

$$\tau_{\mu\nu_2} = 0\cdot 100 + 0\cdot 50 + 1\cdot 0 = 0\ MPa$$

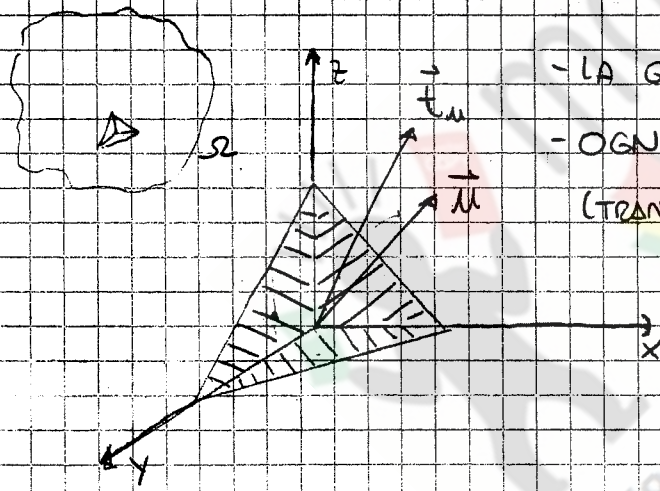
DEF: STATO DI TENSIONE DI UN CORPO Ω

L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI $\vec{t}_\mu$ AL VARIARE DI P E DI VARIARE DI $\vec{\mu}$

CONOSCO LO STATO DI TENSIONE IN UN PUNTO SE CONOSCO LA "STELLA" DI VETTORI IN QUEL PUNTO, MA NON CI INTERESSA MOLTO, PERCHÈ NON CI DICE MOLTO

$\Rightarrow$ M. 3 FUNZIONI SCALARI NELLE VARIABILI x, y, z, n_x, n_y, n_z

TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY

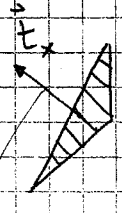


- LA QUARTA FACCIA È PERPENDICOLARE A $\vec{\mu}$
- OGNI FACCIA È PERPENDICOLARE A UN ASSE (TRANNE LA QUARTA FACCIA)

$$\vec{t}_\mu \equiv (\sigma_{\mu\mu}; \tau_{\mu\nu_1}; \tau_{\mu\nu_2})$$

$$\vec{t}_\mu = (t_{\mu x}; t_{\mu y}; t_{\mu z})$$

VOGLIAMO CERCARE LA RELAZIONE CHE LEGA $\vec{t}_\mu$ CON LE ALTRE GRANDEZZE



$$\vec{t}_x = (\sigma_{xx}; \tau_{xy}; \tau_{xz})$$

LO STESSO RAGIONAMENTO SI RIPETE PER y E z

$$\vec{t}_y = (\tau_{yx}; \sigma_{yy}; \tau_{yz})$$

$$\vec{t}_z = (\tau_{zx}; \tau_{zy}; \sigma_{zz})$$

VETTORE TENSIONE AGENTE SU UNA FACCIA DEL TETRAEDRO (FARE ATTENZIONE QUANDO SI SCOMPONE NELLE 3 DIREZIONI PERCHÈ DAI SIST. DI RIF. RISULTANO NEGATIVE

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

• EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

(GLI EQUILIBRI NON SI FANNO SOMMANDO LE TENSIONI, MA SI FANNO CON LE FORZE)

- DIREZIONE x

$$\sigma_{xx} \cdot dA_x + \tau_{yx} \cdot dA_y + \tau_{zx} dA_z = t_{\mu x} \cdot dA \quad (1)$$

$dA_x = \mu_x dA$; $dA_y = \mu_y dA$; $dA_z = \mu_z dA$

$$(\sigma_{xx} \mu_x + \tau_{yx} \cdot \mu_y + \tau_{zx} \mu_z) dA = t_{\mu x} dA$$

(1) MI DICE CHE:

$$\begin{cases} \tau_{xy} \mu_x + \sigma_{yy} \mu_y + \tau_{zy} \mu_z = t_{\mu y} & \text{EQUIL. TRASL. } y \\ \sigma_{xx} \mu_x + \tau_{yx} \mu_y + \tau_{zx} \mu_z = t_{\mu x} = t_\mu \cdot \mu_x & \text{EQUIL. TRASL. } x \\ \tau_{xz} \mu_z + \tau_{yz} \mu_y + \sigma_{zz} \mu_z = t_{\mu z} & \text{EQUIL. TRASL. } z \end{cases}$$

STEP 2: LEGARE I VALORE OTTENUTI A $\vec{t}_\mu$

$$\sigma_{\mu\mu} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{\mu} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{\mu v_1} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{v}_1 \\ \tau_{\mu v_2} = \vec{t}_\mu \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$$

$$\vec{t}_\mu = (t_{\mu x}; t_{\mu y}; t_{\mu z})$$

$$\vec{\mu} \equiv (\mu_x; \mu_y; \mu_z)$$

$$\sigma_{\mu\mu} = t_{\mu x} \cdot \mu_x + t_{\mu y} \cdot \mu_y + t_{\mu z} \cdot \mu_z$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

SOSTITUISCO $\tau_{\mu x}$; $\tau_{\mu y}$ e $\tau_{\mu z}$ in $\sigma_{\mu\mu}$

$$\sigma_{\mu\mu} = \sigma_{xx} \cdot \mu_x^2 + \tau_{yx} \mu_x \mu_y + \tau_{zx} \mu_x \mu_z + \tau_{xy} \mu_x \mu_y + \sigma_{yy} \mu_y^2 + \tau_{zy} \mu_z \mu_y + \tau_{xy} \mu_z \mu_x + \tau_{yz} \mu_z \mu_y + \sigma_{zz} \mu_z^2 =$$

$$\sigma_{\mu\mu} = \sigma_{xx} \mu_x^2 + \sigma_{yy} \mu_y^2 + \sigma_{zz} \mu_z^2 + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \mu_x \mu_y + (\tau_{xz} + \tau_{zx}) \mu_x \mu_z + (\tau_{yz} + \tau_{zy}) \mu_y \mu_z$$

IN FORMA MATRICIALE

$$\sigma_{\mu\mu} = (T \cdot \vec{\mu}) \cdot \vec{\mu}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

TENSORE DEGLI STATI DI CAUCHY

PRODOTTO MATRICIALE

$$\sigma_{\mu\mu} = (T \cdot \vec{\mu}) \cdot \vec{\mu}$$

$$\tau_{\mu v_1} = (T \cdot \vec{\mu}) \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{t}_\mu = T \cdot \vec{\mu}$$

$$\tau_{\mu v_2} = (T \mu) \cdot \vec{v}_2 \quad = T(P) \cdot \vec{\mu}$$

POSSIAMO VEDERE CHE È UNA DIPENDENZA LINEARE (*)