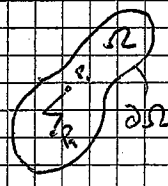
APPUNTI

▶ MECCANICA = studio del moto { ① cinematica (moto senza cause) ② statica (stato di assenza di moto con cause) ③ dinamica

② age di equilibrio
③ Moto nulla a causa di altri inerziali
altrove variabile - presenza del tempo

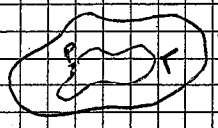
Noi essenzialmente studieremo ① e ②

▶ SOLIDO = Consideriamo un corpo e lo indico con $\Omega$
La frontiera di un solido si indica con $\partial\Omega$
Noi studiamo corpi continui ovvero per $P_1$ e $P_2$ in un corpo sono sempre connessi tra loro tramite una spezzata continua

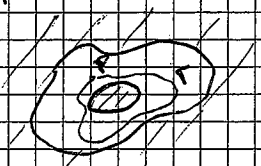



Ci sono possono essere: (sempre continui)

ⓐ monoconnessi = ovvero se esiste la curva $\Gamma$ tale per cui tutti i punti interni in essa appartengono al solido (senza buchi)




ⓑ pluriconnessi = se non posso restringere $\Gamma$ a piacere fino idealmente a racchiudere solo P stesso




⊗ 3 raggruppamenti dell'insieme di cui devo conoscere per risolvere un problema

① EQUILIBRIO ($\sigma$) TENS
② CONGRUENZA ($\varepsilon$) DEF
③ LEGAMI COSTITUTIVI

} da conoscere per risolvere un problema

Cosa vuol dire risolvere un problema?
Preso un solido con vincoli e forze applicate (= CONDIZIONI AL CONTORNO) Risolvo il problema in termini di: → TENSIONI = (sollecitazioni interne) } INCOGNITE (da calcolare)
→ DEFORMAZIONI = (spostamenti)

② Nella relazione di equilibrio agiscono solo le tensioni $\sigma(\Sigma)$ (Traslazioni e rotazioni)
② Solitamente si chiama in gioco la deformazione $\varepsilon$
③ Mettono in relazione tensioni $\sigma$ e deformazioni $\varepsilon$

Analizziamo

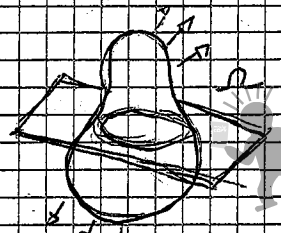
① ANALISI DELLA TENSIONE $\sigma$

② ANALISI DELLA DEFORMAZIONE $\varepsilon$

③ LEGGI COSTITUTIVE $\sigma$ e $\varepsilon$ relazione

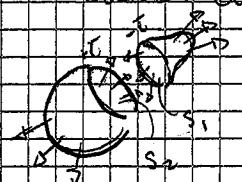
## ① ANALISI DELLA TENSIONE

- Def Tensione secondo Cauchy



Corpo $\Omega$ non vincolato con forze applicate è sempre valido il PRINCIPIO DI EULERO: un corpo è in equilibrio quando ogni sua parte è in equilibrio

Sezioniamo il solido tramite un piano generando una superficie di taglio ottenendo due parti di solido applicando le forze precedenti dopo il taglio non sarà più equilibrio (in movimento) cosa impedisce che sia equilibrio? Le forze interne



Questo vuol dire che applicare una forza ad un solido porta ad avere delle Tensioni interne

▶ Per definire la Tensione servono 2 ipotesi

→ Esiste un area infinitesimo $dA \in S_1, S_2$

Esiste una risultante $\vec{R}$ delle Tensioni $\vec{t}$ in $S_1, S_2$

Esiste un momento risultante $\vec{H}$ di $\vec{t}$ in $S_1, S_2$

→ Esiste la distribuzione di $\vec{t}$ continua sulla superficie di Taglio $S_1, S_2$

Allora ⓐ $\lim_{dA \to 0} \frac{d\vec{R}}{dA} = \vec{t}_n$ (vettore) (la pressione è una sostanza / superficie a meno di scarto una area infinitesimo trascurabile i dettagli)

ⓑ $\lim_{dA \to 0} \frac{d\vec{H}}{dA} = 0$

$\vec{t}_n$ = vettore TENSIONE TOTALE secondo cauchy

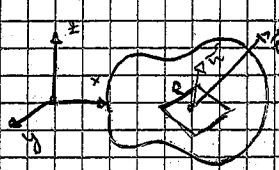
ⓒ Vale per i solidi di Cauchy (non per esempio per i solidi di Cosserat con struttura cristallina $\lim \frac{d\vec{H}}{dA} \neq 0$ non ne studiamo)

- $\vec{t}_n = \vec{t}_n(P, \vec{n})$ (funzione di)

$\vec{n}$ = versore della normale al piano (uscente normale a sup di taglio una volta assegnati P e n avrò

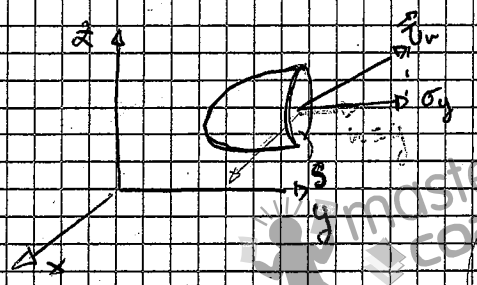
$P = x, y, z$

$n = n_x, n_y, n_z$ (coseni direttori)



(coseni direttori = coseni formati da n rispetto agli assi x, y, z = $n_x, n_y, n_z$) $|\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$

(A) Solido con superficie di Taglio ⊥ a uno dei piani coordinati o ⊥ a y. (*)




$\sigma_y$ = proiezione di $\vec{\sigma}_n$ su n = TENS NORM AGENTE CUNEO y

$\tau_{xy}$ $\tau_{yy}$ $\tau_y$ si può a sua volta proiettare in direzione x

$\tau_{yz}$ - TENSIONE TANGENZIALE agente su un piano ortogonale a y e diretta lungo la asse z

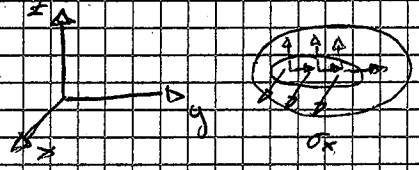
(Prima componente pedice = asse ⊥ a sup su cui agisce tensione

Mentre la seconda dà la direzione

$\tau_{yx}$ = Tensione agente sul piano ⊥ a y e diretta come x

(B) Solido con sup di Taglio ⊥ a x $\sigma_x$ Tensione ortogonale al piano agente lungo x

⊥ x → $\sigma_x$, $\tau_{xy}$, $\tau_{xz}$




NOTA: $\sigma_x = \tau_{xx}$

(C) ⊥ z → $\sigma_z$, $\tau_{zx}$, $\tau_{zy}$

TENSORE DEGLI SFORZI = Descrive in modo completo lo sforzo di un generico solido

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = T(P)$$

→ è solo funzione della posizione

(*) Posso vedere $\vec{\tau}_n$ in diversi sistemi di riferimento:

① $\vec{n}$, V → arbitrario da fissare

② è altro su x, y, z nel caso ② ⊥ a y quindi rispetto a $\tau_{yx}$ e $\tau_{yz}$

master copy

- Il mezzo generico solido è sottoposto a due tipi di forze:
  - → FORZE DI SUPERFICIE $\vec{F}$ $\left[\frac{F}{L^2}\right]$ (per unità di superficie)
  - → FORZE DI DISTANZA DI VOLUME $\vec{f}$ $\left[\frac{F}{L^3}\right]$ (es peso specifico $\gamma$)

- Condizione necessaria e sufficiente affinché il corpo sia verificato è che ci sia → (A) EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE
  → (B) EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE

(A) EQZ DI EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\, dS + \int_{\Omega} \vec{f}\, dV = 0$$

(Se la forza di superficie che agisce sul Tutto è data + la forza di volume che agisce sul corpo è = 0 il corpo è in equilibrio traslazionale)

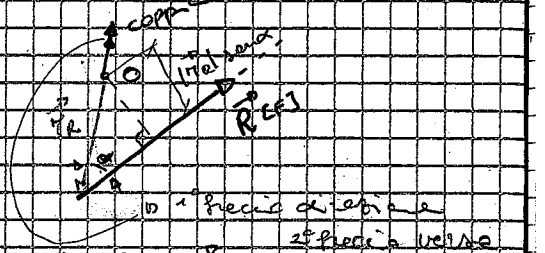
↳ integrale di volume
↳ sulla superficie

(B) EQZ DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{r}_p \wedge \vec{F})\, dS + \int_{\Omega} (\vec{r}_p \wedge \vec{f})\, dV = 0$$

↳ vettoriale

$r_p$ = raggio vettore di F (braccio)

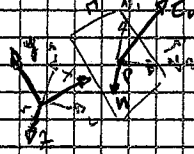



Per calcolare la coppia M del vettore rispetto al O (P)

$\vec{M} = \vec{r}_p \wedge \vec{R}$ $\quad |\vec{M}| = |\vec{r}_p| \cdot |\vec{R}| \sin\alpha$

---

(esercizio) $\vec{T}_n = (100, 50, 0)$ MPa $(= N/mm^2)$




Obiettivo determinare $\sigma_{nn}$, $\tau_{nv_1}$, $\tau_{nv_2}$

x, y, n (no componenti in direzione ~~z~~)

$\vec{n} = (0, 0, 1)$ normale al piano $\pi$

Ora giro antiorariamente $v$ sulla superficie

$v_1$ // a bisettrice x, y $\quad \vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$v_2$ // a bisettrice x, (-y) $\quad \vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

(nota) $\sigma_{nn} = \vec{T}_n \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 100 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

anche a intuito = 0 perché il piano è // a xy

$$\tau_{nv_1} = \vec{T}_n \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 50\sqrt{2} + 25\sqrt{2} = 75\sqrt{2} \text{ MPa}$$

$$\tau_{nv_2} = \vec{T}_n \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 50\sqrt{2} - 25\sqrt{2} = 25\sqrt{2} \text{ MPa}$$

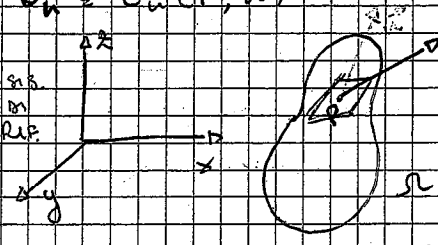
master COPY

APPUNTI

# TEOREMA DEL TETRAEDO DI CAUCHY

Per definire in un punto P il vettore tensione totale

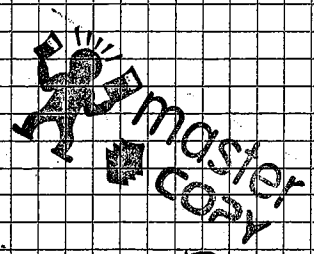
$\vec{t}_n = \vec{\tau}_n(P, \vec{n})$ (tensione)




$\vec{R} \to \partial A$

$\vec{M} \to \partial A$

$\lim_{\partial A \to 0} \frac{\partial \vec{R}}{\partial A} = \vec{\tau}_n$

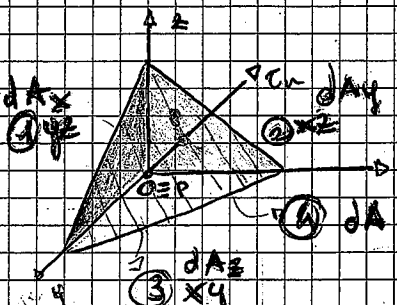



- Il teorema del tetraedo di Cauchy ci permette di definire $\vec{T}_n$ una volta noti:
  - il TENSORE $T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ (è unico di P) — 9 componenti incognite
  - il versore della normale $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$ (coseni direttori)

appstei.com

def Supponiamo di prendere un tetraedro infinitesimo (con vertice in P) sul piano di divisione

zoom su tetraedo con piccolo sist. di riferimento isolato all'altro




($\tau_n$ posto per P e per $\partial$)

$\sigma_x$ avrà sulla faccia ① $\tau_{xx} = \sigma_x$

$\tau_{zx}$ sarà applicata sulla ③

$\tau_{yx}$ sarà applicata sulla ②

(NOTA $\tau_{xz}$ $\tau_{yz}$ ... hanno verso opposto a $\tau_n$ per equilibrare la spostamento)

$\tau_n = \begin{pmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{pmatrix}$ proiettato sugli assi

- SCRIVO L'EQUILIBRIO NOTA! in termini di forze non di tensioni

$$\textcircled{2} \begin{cases} (x) \quad \sigma_x dA_x + \tau_{yx} dA_y + \tau_{yz} dA_z = \tau_{nx} dA \\ (y) \quad \tau_{xy} dA_x + \sigma_y dA_y + \tau_{zy} dA_z = \tau_{ny} dA \\ (z) \quad \tau_{xz} dA_x + \tau_{yz} dA_y + \sigma_z dA_z = \tau_{nz} dA \end{cases}$$

(per equilibrio (dA) = ④ faccia inclinata)

$\perp$ a x $\perp$ a y $\perp$ a z $\perp$ dA