MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

# RICERCA OPERATIVA

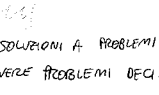
LEZIONE 1 — INTRODUZIONE

LA RICERCA OPERATIVA STUDIA E RICERCA SOLUZIONI A PROBLEMI DECISIONALI

OBIETTIVO: STUDIARE METODI PER RISOLVERE PROBLEMI DECISIONALI. DOVE LE DECISIONI DEVONO ESSERE FATTE RISPETTANDO ALCUNI VINCOLI PER LIMITARE I COSTI O PER MASSIMIZZARE L'UTILITÀ ⇒ OTTIMIZZAZIONE

ES: BIPARTIZIONE DEI NODI

$G = (V_1 \cup V_2, A)$ — GRAFO BIPARTITO — ARCHI = POSSIBILI CONNESSIONI




$V_1$ → INSIEME DEI PUNTI DI ACCESSO (ACCESS POINT)

$V_2$ → POSSIBILE TERMINALE — $d_j$ → DOMANDA DI $j$, $\forall j \in V_2$

$q_i$ → MASSIMA CAPACITÀ DI TRASMISSIONE DI $i$, $\forall i \in V_1$

$c_{ij}$ → COSTO UNITARIO DI TRASMISSIONE SUL COLLEGAMENTO $ij$, $\forall (i,j) \in A$

PROBLEMA DECISIONALE: DECIDERE QUANTO INVIARE LUNGO OGNI COLLEGAMENTO DELLA RETE IN MODO DA SODDISFARE LA DOMANDA DI OGNI TERMINALE; RISPETTARE LA CAPACITÀ DI OGNI ACCESS POINTS [VINCOLI]; A COSTO MINIMO [OTTIMIZZARE]

SCHEMA DI PROCESSO DECISIONALE

① INDIVIDUAZIONE DEL PROBLEMA DECISIONALE ② ANALISI DELLA REALTÀ E DELLA RACCOLTA DEI DATI ③ DEFINIZIONE DI UN MODELLO MATEMATICO
④ RISOLUZIONE DEL MODELLO MATEMATICO (ALGORITMO RISOLUTIVO) ⑤ ANALISI RISULTATI (3 e 4 ⇒ ARGOMENTI PRINCIPALI DEL CORSO)

FAMIGLIE DI MODELLI MATEMATICI

① TEORIA DEI GIOCHI ② MODELLI DI SIMULAZIONE ③ MODELLI ANALITICI ⇝ IL PROBLEMA È DESCRITTO DA RELAZIONI MATEMATICHE TRA VARIABILI DECISIONALI; SI CERCANO VALORI PER VARIABILI CHE SODDISFINO I VINCOLI E OTTIMIZZANO UN CRITERIO (FUNZIONE OBIETTIVO)

⇒ UN MODELLO ANALITICO:

- VARIABILE DECISIONALE: $X_{ij}$ = QUANTITÀ DA INVIARE LUNGO $(ij)$ (COLLEGAMENTO), $\forall (ij) \in A$
- VINCOLI: $\forall j \in V_2 \to \sum_{(ij)\in A} X_{ij} = d_j$ ⇝ SODDISFAZIONE DELLA DOMANDA $\forall j$
  $\forall i \in V_1 \to \sum_{(ij)\in A} X_{ij} \le q_i$ ⇝ SODDISFAZIONE CHE OGNI NODO NON ECCEDA LA CAPACITÀ TRASMISSIVA
  $\forall (ij) \in A \to X_{ij} \ge 0$

  } OGNI VALORE DI $X_{ij}$ CHE SODDISFI TUTTI I VINCOLI È UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE DEL PROBLEMA, MA ORA SI DEVE OTTIMIZZARE I COSTI (MINIMIZZARE)

- FUNZIONE OBIETTIVO: $\min \left\{ \sum_{(ij)\in A} c_{ij} \cdot X_{ij} \right\} \quad \forall (i,j) \in A$

PANORAMICA DEL CORSO:
1) DEFINIZIONI INTRODUTTIVE: PROBLEMI, MODELLI, ALGORITMI
2) PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL): MODELLI + ALGORITMI
3) PROBLEMI DI FLUSSO DI RETE (caso speciale di PL): CAMMINO MINIMO, FLUSSO MASSIMO, FLUSSO DI COSTO MINIMO
4) PROBLEMI PL INTERA (PLI): TECNICHE DI MODELLAZIONE, EURISTICHE, TECNICHE DI RILASSAMENTO, ALGORITMO DI BRANCH AND BOUND (ESATTO)

DEFINIZIONI E CONCETTI BASE

PROBLEMA: DOMANDA GENERICA, ESPRESSA MEDIANTE PARAMETRI. ISTANZA DI PROBLEMA: DOMANDA SPECIFICA, OTTENUTA ATTRIBUENDO UN VALORE AD OGNI PARAMETRO

$F$: INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL PROBLEMA ≜ INSIEME AMMISSIBILE. NEL CASO DI PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE ⇒ $C : F \to \mathbb{R}$ ≜ FUNZIONE OBIETTIVO

(ESEMPIO DI UN MODELLO GENERALE DI PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE: $(\min_{\max}) \{ C(x) : x \in F \}$ $\quad (\min \{C(x) : x \in F\} = -\max\{-C(x) : x \in F\})$
DOVE $C$ E $F$ SONO PARAMETRI, MENTRE $X$ È IL VETTORE DELLE VARIABILI DECISIONALI

$(\min_{\max}) \{ C(x) : x \in F \} = z(P) \triangleq$ VALORE OTTIMO DI $(P)$. MENTRE $x^* \in F$ TALE CHE $C(x^*) = z(P)$ È UNA SOLUZIONE OTTIMA DI $(P)$

ESEMPIO DI EQUIPARTIZIONE

PROBLEMA: DATI $n$ E $N = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ CON $a_i \in \mathbb{N}$, VOGLIO TROVARE UN SOTTOINSIEME $S \subseteq N$ TALE CHE LA DIFFERENZA, IN VALORE ASSOLUTO, TRA LE SOMME DEGLI ELEMENTI IN $S$ E QUELLI IN $N \setminus S$, SIA LA MINORE POSSIBILE

$n, a_1, \dots, a_n$ SONO TUTTI PARAMETRI (SE $n=4 \rightsquigarrow N = \{7,3,6,6\} \Rightarrow$ SI OTTIENE UNA ISTANZA) $\quad F = \{ S : S \subseteq N \}$ ← SOLUZIONI AMMISSIBILI (VARIABILE DECISIONALE → VINCOLO)

FUNZIONE OBIETTIVO → $C(S) = \left| \sum_{a_i \in S} a_i - \sum_{a_i \in N \setminus S} a_i \right| \Rightarrow \min \{ C(S) : S \subseteq \{a_1, \dots, a_n\} \} \rightsquigarrow S^* = \{3,7\} \Rightarrow C(S^*) = 0 \Rightarrow S^*$ È UNA SOLUZIONE OTTIMA

[QUESTO ERA UN PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE **DISCRETO** → CIOÈ CON UN NUMERO FINITO DI SOLUZIONI AMMISSIBILI]

ESEMPIO DI PACKING (PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE **CONTINUO**)



$m$ = NUMERO NATURALE (PARAMETRO). PROBLEMA ⇒ DETERMINARE IL MASSIMO RAGGIO DI $m$ CERCHI IDENTICI INSCRITTI NEL QUADRATO CHE NON SI INTERSECHINO

VARIABILI DECISIONALI: $(x_i, y_i)$ COPPIA $\forall$ CERCHIO = COORDINATE DEL CENTRO DEL CERCHIO $i$ (con $i = 1, \dots, m$) E RAGGIO $r$

LEZIONE 2 — CONTINUO DELL'IMPACCAMENTO



MASSIMO RAGGIO PER $m$ CERCHI UGUALI CENTRATI IN $(x,y)$. VARIABILI: $r$, $C_i = (x_i, y_i)$ CON $1 \le i \le m$

DATO CHE IL CERCHIO DEVE STARE NEL QUADRATO: $r \le x_i \le 1-r$ E $r \le y_i \le 1-r$ $\quad \Rightarrow \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \ge 2r$

I CERCHI NON DEVONO INTERSECARSI: $\forall i \quad 1 \le i \le m-1$ E $\forall j \quad i < j \le m$

---

$(P) = \min \{ C(x) : x \in F \}$ ⇒ ESITI DI RISOLUZIONE:

① $(F)$ VUOTO, ONVERO $F = \emptyset$ ⇝ PER CONVENZIONE: $z(P) = +\infty$ (SE $\min\{\}$) OPPURE $z(P) = -\infty$ (SE $\max\{\}$)

② $(P)$ È INFERIORMENTE ILLIMITATO (SE min) ⇝ $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x : C(x) \le M$ OPPURE $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x : C(x) \ge M$ : PER CONVENZIONE $\begin{cases} z(P) = +\infty & (\text{SE } \min) \\ z(P) = -\infty & (\text{SE } \max) \end{cases}$
[SUPERIORMENTE (SE max)]

③ $(P)$ HA OTTIMO FINITO, $z(P)$ FINITO, MA NON AMMETTE SOLUZIONE OTTIMA ⇝ $\nexists x \in F : C(x) = z(P)$ (ES: $\inf\{X : x > 0\} \to$ L'OTTIMO SAREBBE 0, MA NON È AMMISSIBILE)

④ $(P)$ AMMETTE OTTIMO FINITO E SOLUZIONE OTTIMA

VERSIONI ALTERNATIVE AI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

- PROBLEMA DI ESISTENZA (NON ESISTONO FUNZIONI OBIETTIVO): DATO $F \to \exists x \in F$? $(F, \exists)$

ESISTONO TRASFORMAZIONI DA PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE A PROBLEMA DI ESISTENZA E VICEVERSA

ESISTENZA → OTTIMIZZAZIONE ⇝ $(F, \exists)$ $F' \supseteq F$ E $C(x) = \begin{cases} 0 & x \in F \\ 1 & x \in F' \setminus F \end{cases}$ ⇝ IN QUESTO CASO $C(x)$ MI DICE SE $x$ È AMMISSIBILE O MENO

OTTIMIZZAZIONE → ESISTENZA ⇝ $\min \{ c(x) : x \in F \}$, DEFINISCO $F^* =$ INSIEME DELLE SOLUZIONI OTTIME, E CERCO $(F^*, \exists)$ [SOLO TEORICO]

- VERSIONE DECISIONALE: $F_K = \{ x \in F : C(x) \le K \}$ CON $K$ PARAMETRO (VERSIONE "INDEBOLITA'") $(F_K, \exists)$ [CHIAMATO ANCHE PROBLEMA DECISIONALE ASSOCIATO]

PROBLEMI: POLINOMIALI $(P)$ ⇝ ALGORITMI PIÙ FACILI
NP-HARD ⇝ TENDONO AD ESPLODERE ANCHE ESPONENZIALMENTE

ABBIAMO DETTO: PROBLEMA → MODELLO ANALITICO → ALGORITMO RISOLUTIVO (AD HOC / SOLVER)

ALGORITMI RISOLUTIVI: ESATTI ⇝ UNA SOLUZIONE OTTIMA
EURISTICI ⇝ UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE SPERABILMENTE BUONA (USATI SOPRATTUTTO PER PROBLEMI NP-HARD)

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

# RICERCA OPERATIVA

ALGORITMI EURISTICI, VALUTARE LA QUALITÀ DI $\bar{x} \in F$ : $(P)\ \min C(x)$

ERRORE ASSOLUTO: $E_{\bar{x}} = C(\bar{x}) - z(P) \geq 0$ (OVVERO $C(\bar{x})$ STIMA PER ECCESSO IL VALORE OTTIMO CHE CERCO) $\Rightarrow$ SI DICE CHE $C(\bar{x})$ È UNA SOLUZIONE UPPER-BOUND DI $z(P)$

ERRORE RELATIVO: $R_{\bar{x}} = \frac{C(\bar{x}) - z(P)}{|z(P)|}$ SE $R_{\bar{x}} < \varepsilon$, PER $\varepsilon > 0$, ALLORA $\bar{x}$ È $\varepsilon$-OTTIMA

- INVECE DI STUDIARE $(P)$, STUDIEREMO UNA VERSIONE SEMPLIFICATA CHIAMATA RILASSAMENTO DI $(P)$: $(P)\ z(P) = \min\{C(x) : x \in F\}$ $\Rightarrow (\bar{P})\ z(\bar{P}) = \min\{\bar{C}(x) : x \in \bar{F}\}$ CON: $F \subseteq \bar{F}$ ALLARGO LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI AMMISSIBILI, $\bar{C}(x) \leq C(x)\ \forall x \in F$

[SE $(\bar{P})$ È DI MASSIMO, CAMBIAMO TUTTE LE DISUGUAGLIANZE]

PROPOSIZIONE: $z(\bar{P}) \leq z(P) \rightsquigarrow (\bar{P})$ FORNISCE UNA STIMA INFERIORE DI $(P)$ (LOWER-BOUND)

1ª CONSEGUENZA: $R_{\bar{x}} = \frac{C(\bar{x}) - z(P)}{|z(P)|} \leq \frac{C(\bar{x}) - \bar{z}(\bar{P})}{|\bar{z}(\bar{P})|} \leq \varepsilon$

2ª CONSEGUENZA: SIA $x^*$ SOLUZIONE OTTIMA DI $(\bar{P})$, SE: 1) $x^* \in F$ OVVERO AMMISSIBILE PER $(P)$ 2) $\bar{C}(x^*) = C(x^*)$ $\rightsquigarrow$ VALORI DI FUNZIONI OBIETTIVO DI $(P)$ E DI $(\bar{P})$ COINCIDONO IN $x^*$

ALLORA POSSO AFFERMARE CHE $x^*$ È SOLUZIONE OTTIMA ANCHE DI $(P)$:

$\rightsquigarrow$ SI DÀ CHE $\bar{C}(x^*) = z(\bar{P}) \leq z(P) \leq C(x^*)$ SE $\bar{C}(x^*) = C(x^*)$ (IPOTESI 1, IPOTESI 2) $\Rightarrow \bar{C}(x^*) = z(\bar{P}) \leq z(P) \leq \bar{C}(x^*) \Rightarrow z(\bar{P}) = z(P)$

## PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

DAL GENERICO MODELLO DI $C(x)$, VALGONO LE SEGUENTI PROPOSIZIONI:

1) NUMERO FINITO DI VARIABILI REALI: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
2) FUNZIONE OBIETTIVO LINEARE: $C(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = C \cdot X$ ($c_i$ = COSTI; $C$ = VETTORE DEI COSTI)
3) F DEFINITA MEDIANTE UN INSIEME FINITO m DI VINCOLI LINEARI: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \lesseqgtr b \Rightarrow A \cdot x \lesseqgtr b$

ESEMPIO (PIANIFICAZIONE DELLA PRODUZIONE) $\rightarrow$ PINTEL

MICROPROCESSORI: PINTIUM (CHE HA PREZZO UNITARIO 500, MASSIMO DI 400.000 PRODUZIONE/SETTIMANA SUL MERCATO), COLORON (CON PREZZO UNITARIO 200, MASSIMO 700.000 PRODUZIONE/SETTIMANA DI MERCATO)

IMPIANTO CON CAPACITÀ PRODUTTIVA $\leq 3000$ WAFER A SETTIMANA. IN 1 WAFER CI STANNO 300 PINTIUM (CON RESA MEDIA 50%) OPPURE 500 COLORON (CON RESA MEDIA 60%)

VARIABILI DECISIONALI: $x_p$ = N° DI PINTIUM/SETTIMANA $\rightarrow 0 \leq x_p \leq 400.000$; $x_c$ = N° DI COLORON/SETTIMANA $\rightarrow 0 \leq x_c \leq 700.000$

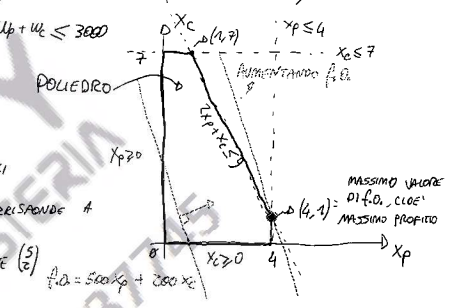
$u_p$ = N° DI WAFER PER PINTIUM; $u_c$ = N° DI WAFER PER COLORON; $u_p + u_c \leq 3000$

$x_p = u_p \cdot 300 \cdot 50\% = u_p \cdot 150 \rightsquigarrow u_p = \frac{x_p}{150}$ $\quad x_c = u_c \cdot 500 \cdot 60\% = u_c \cdot 300 \rightsquigarrow u_c = \frac{x_c}{300}$

$\Rightarrow \frac{x_p}{150} + \frac{x_c}{300} \leq 3000 \Rightarrow 2x_p + x_c \leq 900.000$ $\rightsquigarrow$ FUNZIONE OBIETTIVO = $x_p 500 + x_c 200$

(SE MASSIMIZZO $x_p = 400.000 \Rightarrow x_c = 100.000$ $f.o. = 200M + 20M$)

$(0,0)$ $(4,0)$ $(0,7)$ $(4,7)$ $(4,1)$ $(1,7)$ $\leftarrow$ VERTICI DEL POLIGONO $\Rightarrow$ LA SOLUZIONE OTTIMA SARÀ UNO DEI VERTICI




PROPRIETÀ: SE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI OTTIME DI UN PL È NON VUOTO, ALMENO UNA SOLUZIONE OTTIMA CORRISPONDE A UN VERTICE DEL POLITOPO ($n$-DIMENSIONI)

AUMENTANDO LA FUNZIONE OBIETTIVO, SI TRASLA LUNGO IL GRADIENTE DELLA RETTA $f.o. \rightarrow \vec{\nabla} f.o. = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ DIREZIONE $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE OTTIMA SI OTTIENE TRASLANDO $f.o.$ FINO A CHE SI TROVA L'ULTIMO PUNTO AMMISSIBILE = $(4,1)$

ALTRI ESITI IN PL:

2) PROBLEMA SUPERFLUAMENTE ILLIMITATO. ESEMPIO TOGLIENDO I VINCOLI $0 \leq x_c \leq 700.000$ E $2x_p + x_c \leq 900.000$ $\rightsquigarrow$  $z \rightarrow \infty$
3) REGIONE AMMISSIBILE VUOTA $\rightsquigarrow$ ESEMPIO: $x_1 + x_2 \leq 4$; $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 10$ $\rightarrow x_1 + x_2 \geq 12 \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FORMA STANDARD PER PL

$\max Cx$ CON $x \in \mathbb{R}^n$ = VETTORE DELLE VARIABILI DECISIONALI; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ = COEFFICIENTI DEI VINCOLI
$Ax \leq b$ $\quad C \in \mathbb{R}^n$ = VETTORE DEI COSTI; $b \in \mathbb{R}^m$ = TERMINI NOTI

PINTEL: $\max Cx \rightarrow \max \begin{bmatrix} 500 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix}$ $\quad Ax \leq b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ PERCHÉ $0 \leq x_p \leq 4 \rightarrow x_p \leq 4$ E $-x_p \leq 0$; $0 \leq x_c \leq 7$; $2x_p + x_c \leq 9$

EQUIVALENZE SINTATTICHE

1) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \equiv -\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$ $\quad$ 2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$ $\quad$ 3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i$

4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i$ CON $s_i \geq 0$ VARIABILI DI SCARTO (VARIABILI STRUTTURALI) $\quad$ 5) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$

6) $x_i$ NON VINCOLATA IN SEGNO $\equiv x_i = x_i^+ - x_i^-$ CON $x_i^+, x_i^- \geq 0$

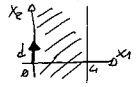
ESEMPIO $\min -2x_1 + 3x_2$ $\quad \begin{matrix} x_1 - x_2 \geq -1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{matrix} \equiv \begin{matrix} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ -2x_1 - x_2 \leq -3 \end{matrix}$ $\quad -\max 2x_1 - 3x_2$

## LEZIONE 3 GEOMETRIA DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE [CAPITOLO 2.1.1]

- UN VINCOLO LINEARE DEL TIPO $A_i x = b_i$ INDIVIDUA L'IPERPIANO $P_i = \{x : A_i x = b_i\}$, CHE COSTITUISCE LA FRONTIERA DEL SEMISPAZIO $S_i = \{x : A_i x \leq b_i\}$ INDIVIDUATO DAL VINCOLO $A_i x \leq b_i$
- FACENDO RIFERIMENTO ALLA FORMA $\max Cx$ $Ax \leq b$ CON $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ E $b \in \mathbb{R}^m$. LA REGIONE AMMISSIBILE DI UN PROBLEMA DI PL È: $P = \{x : Ax \leq b\}$ OVVERO INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO $m$ DI SEMISPAZI $\Rightarrow$ P È UN POLIEDRO
- POLIEDRO: INSIEME CONVESSO. $\forall x, y \in P$: $\alpha x + (1-\alpha) y \in P$, $\forall \alpha \in [0,1]$ CONTINUAZIONE CONVESSA DI $x$ E $y$ $\rightsquigarrow$ SI INDICA CON $\text{conv}(x,y)$

ESEMPIO  POLIEDRO (POLITOPO)  CONVESSO NON POLIEDRICO  NON CONVESSO

DEF $x$ È UN VERTICE (O PUNTO ESTREMO) DI P SSE: $x', x'' \in P$, $x \in \text{conv}(x', x'') \Rightarrow x \equiv x'$ O $x \equiv x''$. OVVERO NON PUÒ ESSERE ESPRESSO COME COMBINAZIONE CONVESSA DI DUE PUNTI DIVERSI DA ESSO, ALMENO UNO DEVE ESSERE IL VERTICE




- UN POLIEDRO HA SEMPRE VERTICI? $\rightarrow \max x_1 + x_2$ $\quad x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 4$ $\Rightarrow$ È UN POLIEDRO SENZA VERTICI
$\Rightarrow$ ACCADE QUANDO A NON HA RANGO MASSIMO: INFATTI $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ E $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{rango}(A) = 1$, MA SIAMO IN $\mathbb{R}^2$
- ESISTE UNA DIREZIONE PER CUI $Ax \leq b$ È SEMPRE VERIFICATA $\rightsquigarrow$ NELL'ESEMPIO $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ LUNGO $x_2$
- SI HA UN VERTICE (IN $\mathbb{R}^2$) IN CORRISPONDENZA DELL'INTERSEZIONE DI ALMENO DUE IPERPIANI $A_i x = b_i$ E $A_j x = b_j$ CON $A_i \in A_j$ LINEARMENTE INDIPENDENTI

RAPPRESENTAZIONI: $A = \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \end{bmatrix}$ DEVE AVERE RANGO MASSIMO (2)




- PER FACCE $\rightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 4, x_2 \leq 7, 2x_1 + x_2 \leq 9; -x_1 \leq 0; -x_2 \leq 0\}$
- PER INVILUPPO CONVESSO (CIOÈ PER PUNTI) $\rightarrow P = \text{conv}\{(0,0), (4,0), (4,1), (1,7), (0,7)\} \Rightarrow$ P È IL PIÙ PICCOLO INSIEME CONVESSO CONTENENTE I VERTICI ELENCATI


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

# RICERCA OPERATIVA

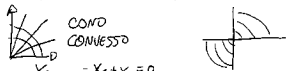
⇒ IN GENERALE, DATO $X=\{x^1, x^2, \dots, x^s\} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow P = \text{conv}\left\{x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1,\ i=1,\dots,s\right\}$ CIOÈ L'INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI CONVESSE OTTENIBILI DEI PUNTI IN $X$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $P$ È UN POLIEDRO LIMITATO (POLITOPO) I CUI VERTICI SONO ELEMENTI DI $X$

• SE $P$ È UN POLIEDRO NON LIMITATO $\rightarrow P \neq \text{conv}\{(0,0),(4,0)\}$ 

$P$ NON SI PUÒ RAPPRESENTARE COME COMBINAZIONE CONVESSA DI 2 PUNTI, PERCUI SERVE ANCHE UNA **DIREZIONE DI RECESSIONE** $d$ DI UN POLIEDRO $P$, CHE INDICA UNA DIREZIONE LUNGO LA QUALE I PUNTI FANNO SEMPRE PARTE DEL POLIEDRO

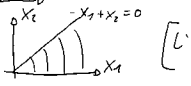
$d \in \mathbb{R}^n$ È UNA DIREZIONE DI RECESSIONE DI $P$ SE: $\forall x \in P,\ \forall \lambda \geq 0 : x + \lambda d \in P$




• IL CONO È $C \subseteq \mathbb{R}^n$ SE $x \in C,\ \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha x \in C \rightarrow$ ESEMPIO

UN CONO È POLIEDRICO SE $C = \{x : Ax \leq 0\}$. POLIEDRO DATO DA $b = 0$

ES: $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0,\ -x_1 + x_2 \leq 0\}$




[L'UNICO VERTICE DI UN CONO POLIEDRICO È L'ORIGINE]

LE DIREZIONI? → CONSIDERO $v^1=(1,0)$, $v^2=(1,1)$, $\text{span}^+\{v^1, v^2\} = C \Rightarrow v^1$ E $v^2$ SONO DETTI GENERATORI DEL CONO

PER GENERATORI: $C = \text{cono}(\{v^1, v^2\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = y_1 v^1 + y_2 v^2,\ y_1, y_2 \geq 0\}$

IN GENERALE: DATO $V = \{v^1, \dots, v^t\} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \text{cono}(V) = \{x : x = y_1 v^1 + \dots + y_t v^t,\ y_i \geq 0\}$

TEOREMA: SI DIMOSTRA CHE, DATO $C = \{x : Ax \leq 0\}$, ESISTE $V$ TALE CHE $C = \text{cono}(V)$ E VICEVERSA

→ TORNIAMO AL GENERALE: $P = \{x : Ax \leq b\}$. L'INSIEME DELLE DIREZIONI DI RECESSIONE DI $P$ È UN CONO POLIEDRICO → $\text{rec}(P) = \{d : Ad \leq 0\}$ $d \neq 0$

⇒ QUINDI: VERTICI E GENERATORI DI CONI SONI GLI ELEMENTI CHE BASTANO PER CARATTERIZZARE TUTTI GLI ELEMENTI DI UN POLIEDRO ($n^\circ$ FINITO)

ES: 


VERTICI: $\{(0,0),(4,0)\}$ GENERATORI DIREZIONI: $\{(0,1)\}$ $\quad P = \underbrace{\text{conv}(\{(0,0),(4,0)\})}_{\text{POLITOPO}} + \underbrace{\text{cono}(\{(0,1)\})}_{\text{CONO POLIEDRICO}}$

**LEZIONE 4** TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE DI POLIEDRI (MOTZKIN)

$P \in \mathbb{R}^n$ È UN POLIEDRO SSE ESISTONO DUE INSIEMI FINITI $X = \{x^1, \dots, x^s\} \in V = \{v^1, \dots, v^t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ TALE CHE: $P = \underbrace{\text{conv}(X)}_{\text{POLITOPO}} + \underbrace{\text{cono}(V)}_{\text{CONO POLIEDRICO}}$

DUE RAPPRESENTAZIONI PER $P$: PER FACCE → $P = \{x : Ax \leq b\}$; PER PUNTI E DIREZIONI → $P = \text{conv}(X) + \text{cono}(V)$

ES: CUBO  VERTICI $2^3$ ⇒ $\dim 3$, VERTICI $2^3$ ($\dim n$, VERTICI $2^n$)
FACCE 6 ⇒ $\dim 3$, FACCE $2 \cdot 3$ ($\dim n$, FACCE $2 \cdot n$) ⇒ MEGLIO

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

SIA $P = \{x : Ax \leq b\}$ NON VUOTO, INDICHIAMO CON $\overbrace{x^1, \dots, x^s}^{\text{VERTICI}}$ E $v^1, \dots, v^t \subseteq \mathbb{R}^n$ TALI CHE $P = \text{conv}(\{x^1, \dots, x^s\}) + \text{cono}(\{v^1, \dots, v^t\})$

CONSIDERIAMO $\max\{cx : Ax \leq b\}$: HA OTTIMO FINITO SSE IL VETTORE DEI COSTI $c \cdot v^j \leq 0$ CON $j = 1, \dots, t$

IN CASO DI OTTIMO FINITO, $x^k$ È SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA CON $1 \leq k \leq s$

DIMOSTRAZIONE

$$x \in P \iff \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j v^i \\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, s \\ \gamma_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, t \end{cases} \rightarrow \text{PL} \Rightarrow \max\left\{ c\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j v^j\right) : A\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j v^j\right) \leq b \right\}$$

① IL PROBLEMA HA OTTIMO FINITO SE $c \cdot v^j \leq 0$ CON $j = 1, \dots, t$. SUPPONGO $j^*$ TALE CHE $cv^{j^*} > 0$, $1 \leq j^* \leq t$

$\max\left\{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i c x^i + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j c v^j\right\}$. SE $cv^{j^*} \geq 0 \rightarrow \gamma_{j^*} \cdot cv^{j^*}$ PUÒ ESSERE AUMENTATO A PIACERE CON $\gamma_{j^*} \to \infty \Rightarrow$ SUPERIORMENTE ILLIMITATO

QUINDI: UN PL (max) È SUPERIORMENTE ILLIMITATO SSE $\exists\, v^{j^*}$ TALE CHE $cv^{j^*} > 0 \Rightarrow v^{j^*}$ DIREZIONE DI CRESCITA

② SE $cv^j \leq 0$ $\quad j = 1, \dots, t$ • SIA $x \in P$ ($x$ SOLUZIONE AMMISSIBILE)

$cx = \text{costo} = \max\left\{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i (cx^i) + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \underbrace{(cv^j)}_{\leq 0}\right\} = \max\left\{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i (c \cdot x^i)\right\}$

SUPPONGO CHE $x^k$ SIA TALE CHE $cx^k = \max_{i=1,\dots,s}\{cx^i\} \Rightarrow \text{costo} = \max\left\{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i (c \cdot x^k)\right\}$ $\lambda_i$ OPPORTUNI

$\Rightarrow \text{costo} = cx^k \cdot \underbrace{\max\left\{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i\right\}}_{=1} = cx^k \Rightarrow x = x^k$

TEOREMA DELLA DUALITÀ

| | A | B | FABBISOGNO MINIMO |
|---|---|---|---|
| CARBOIDRATI | 5 | 7 | 8 |
| PROTEINE | 4 | 2 | 15 |
| VITEMINE | 2 | 1 | 3 |
| COSTO UNITARIO | 1200 | 750 | |

ES: DIETA: $\rightarrow$ $5x_1 + 7x_2 \geq 8$; $4x_1 + 2x_2 \geq 15$; $2x_1 + x_2 \geq 3$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ $\quad \min\{1200x_1 + 750x_2\}$

PROBLEMA ASSOCIATO: VARIABILI DECISIONALI $\begin{cases} y_1 = \text{PREZZO PILLOLA CARBOIDRATI} \\ y_2 = \text{PREZZO PILLOLA PROTEINE} \\ y_3 = \text{PREZZO PILLOLA VITAMINE} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1200$; $7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 750$; $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

• LEGAME SINTATTICO TRA I 2 PL

MOLTIPLICO PER $x_1$ E $x_2$: $x_1(5y_1 + 4y_2 + 2y_3) \leq 1200x_1$ E $x_2(7y_1 + 2y_2 + y_3) \leq 750x_2$

ALLORA $\rightarrow$ $x_1(5y_1 + 4y_2 + 2y_3) + x_2(7y_1 + 2y_2 + y_3) \leq 1200x_1 + 750x_2 \Rightarrow y_1(5x_1 + 7x_2) + y_2(4x_1 + 2x_2) + y_3(2x_1 + x_2) \leq 1200x_1 + 750x_2$

$\Rightarrow$ IL PRIMO MEMBRO DELLA DISUGUAGLIANZA È $\geq 8y_1 + 15y_2 + 3y_3 \leq 1200x_1 + 750x_2$

• IN GENERALE, DATO UN PL NELLA FORMA $\max\{cx : Ax \leq b,\ x \geq 0\} \rightarrow$ **PRIMALE**. AD ESSO È ASSOCIATO $\min\{yb : yA \geq c,\ y \geq 0\} \rightarrow$ **DUALE**

E COSTITUISCONO UNA COPPIA SIMMETRICA DI PROBLEMI DUALI

TEOREMA DI DUALITÀ: IL DUALE DEL DUALE È IL PRIMALE

DIMOSTRAZIONE: $\min\{yb : yA \geq c,\ y \geq 0\} \Rightarrow -\max\{-yb : -yA \leq -c,\ y \geq 0\} = -\max\{(-b)y : (-A^T)y \leq -c,\ y \geq 0\}$

CHIAMO $y, x \rightarrow -\min\{-cx : x(-A^T) \geq (-b),\ x \geq 0\} \rightarrow \max\{cx : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

• DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI COPPIA DI PROBLEMI DUALI SI HA CON LA COPPIA ASIMMETRICA: (P) $\max_{Ax \leq b} cx$ $\quad$ (D) $\min_{yA = c,\ y \geq 0} yb$

CORRISPONDENZA PRIMALI – DUALI

| max | COSTI c | TERMINI NOTI b | $A_i x \leq b_i$ | $A_i x \geq b_i$ | $A_i x = b_i$ | $x_i \geq 0$ | $x_i \leq 0$ | $x_i \lessgtr 0$ (NON HA RESTRIZIONI A SEGNO) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| min | b | c | $y_i \geq 0$ | $y_i \leq 0$ | $y_i \lessgtr 0$ | $yA^j \geq c_j$ | $yA^j \leq c_j$ | $yA^j = c_j$ |