MATTIA TACCO / MARCELLO MARINO → ANALISI

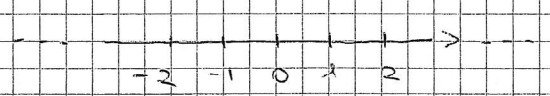
1° livello → riproduco → qualità 1

elementi impianti

ANALISI 1 ⟶ Teoria delle FUNZIONI REALI di 1 variabile REALE.

26/09/2019

NUMERI REALI ($\mathbb{R}$) / "retta reale"



("retta di numeri continua")

↓

ASSIOMA DI CONTINUITÀ

INSIEME = "scatola" con dentro elementi

Es: $A = \{1, 3, 12, 2\pi, a, \square\}$

(A: nome insieme; elementi: elenco)

- l'ordine degli elementi non conta
- Ripetizioni non contano ($\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$)

- $B = \{$ interi positivi dispari $\}$ (proprietà degli elementi)

($B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$) meno preciso

Notazione:

'$a \in A$' = a "appartiene" ad A

'$a \notin A$' = "non appartiene"

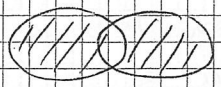
'$B \subseteq A$' = sottoinsieme (ogni elemento di B è ANCHE elemento di A) o "uguale" / "contenuto"

'$\emptyset$' = insieme vuoto (non ha elementi)

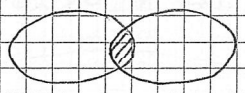
'$|A|$' = n° finito di elementi di un insieme finito ("cardinalità")

Operazioni:

- $A \cup B$ = "Unione" (elementi di A o B)

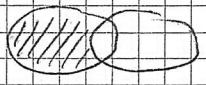


- $A \cap B$ = "Intersezione" (elementi di A e B)



(può essere vuoto)

- $A \setminus B$ = "Differenza" (elementi di A che non sono in B)



- $A \times B$ = "Prodotto cartesiano" (insieme delle coppie ordinate (a,b), $a \in A$, $b \in B$)

$\downarrow$

$(a,b) \neq (b,a)$, non si possono scambiare

Es: $A = \{1,2\}$

$B = \{2,3,4\}$

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

(1,2): 1 di B, 2 di B; (2,2): 2 di A, 2 di B

per insieme finito $\rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$

INSIEME DELLE PARTI ($\mathcal{P}(A)$): insieme in cui gli elementi sono tutti i sottoinsiemi di A

$\mathcal{P}(A) = \{\text{insieme di } B \mid B \subseteq A\}$

Es: $A = \{1,2\}$

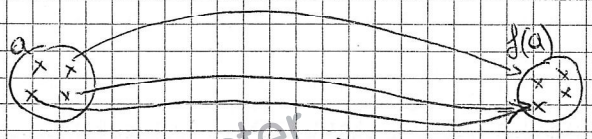
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\emptyset$: è contenuto in tutti gli insiemi

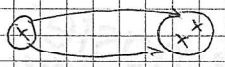
EX: Se A è finito, allora $\mathcal{P}(A)$ è finito e $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

FUNZIONI = $f: A \to B$

- insieme di partenza A
- insieme di arrivo B
- "Regola" che ad ogni elemento di $a \in A$ associa un unico elemento di B che si denota $f(a) \in B$.



N.B. Non è invertibile.



No!

master copy

f

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

"A" "B" "$a \in A$" $f(a)$

$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^2$ N.B. $g(x) \neq f(x)$ perché insieme di partenza è $\neq$

Proprietà:

- **INIETTIVITÀ** $\quad a_1 \neq a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

  $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Es: $f(x) = x^2$ non è iniettiva $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

perché $f(1) = 1$

$f(-1) = 1$

$g(x) = x^2$ $\quad g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

è iniettiva.

- **SURIETTIVITÀ**: $\forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$ (esiste)

master copy

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

non è suriettiva

perché $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

quindi $-1 \in \mathbb{R}$ (in arrivo) non viene mai preso = valore

$x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è suriettiva

$h(x) = x^2$

- BIGETTIVA quando una funzione è sia iniettiva che suriettiva.

$$\forall b \in B \quad \exists! \; a \in A \mid f(a) = b$$

(↓ unico)

- FUNZIONE INVERSA: $f: A \to B$ (f^{-1})

$= g: B \to A$

N.B. Esiste solo se la funzione è bigettiva.

$$\forall a \in A \quad g(f(a)) = a$$

$$\forall b \in B \quad f(g(b)) = b$$

PROPOSIZIONE: la f è invertibile (ovvero f^{-1}) se e solo se è BIGETTIVA. f^{-1} è unica.

Se f è bigettiva definisce $g(b)$ cioè l'unico $a \mid f(a) = b$

Def: $f: A \to B$, $C \subseteq A$ l'IMMAGINE di C è $f(C) = \{ f(a) \mid a \in C \}$ $(f(C) \in B)$



IMMAGINE di f è $f(A) \subseteq B$ ↑ tutti i valori possibili di f.

N.B. $f(A) = B \iff$ (se e solo se) f è suriettiva

Se la funzione non è suriettiva per farla diventare tale è sufficiente restringere B con $f(A)$ ottenendo una nuova funzione.

Restringendo A, f può essere resa "iniettiva".