INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$ = numeri naturali (interi positivi)
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$ = numeri interi
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$ = numeri razionali
- $\mathbb{R}$ = numeri reali
- ($\mathbb{C}$ = numeri complessi)

master COPY

NB: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq (\mathbb{C})$.

Proprietà dei numeri reali:

(1) ALGEBRICHE: $\mathbb{R}$ ha 2 operazioni, somma e prodotto con le seguenti proprietà:

→ SOMMA:
- $a+b = b+a$ (pr. commutativa)
- $(a+b)+c = a+(b+c)$ (pr. associativa)
- $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \mid a+0 = a$ (el. neutro)
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} \mid a+b = 0$, $b = -a$ (opposto)

→ PRODOTTO:
- pr. commutativa
- pr. dissociativa
- $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \mid a \cdot 1 = a$ (el. neutro)
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} \mid a \cdot b = 1$, $b = a^{-1}$ (opposto)

master COPY

pr. distributiva: $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. (mette in relazione somma e prodotto).

master COPY

(2) ORDINAMENTO: dati 2 numeri $\in \mathbb{R}$, x e y, si ha sempre che $x \geq y$ oppure $y \geq x$.

- $x \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (pr. riflessiva)
- se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (pr. antisimmetrica)
- se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (pr. transitiva)

Quali proprietà legano somma, prodotto e ordinamento?

- $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- $x \geq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \geq 0$
  (se $x \geq y$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z \quad \forall z \leq 0$)

N.B. Per ora l'insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ presentano le stesse proprietà. Essi si distinguono per l'ASSIOMA DI CONTINUITÀ, che vale solo per i $\mathbb{R}$.

ASSIOMA DI CONTINUITÀ afferma che: Presi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$, non vuoti, tali che "A sta tutto a sinistra rispetto a B". Ovvero $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$, esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ che "sta in mezzo". Quindi $\forall a \in A$ si ha $a \leq c$ e per $\forall b \in B$ si ha $c \leq b$.

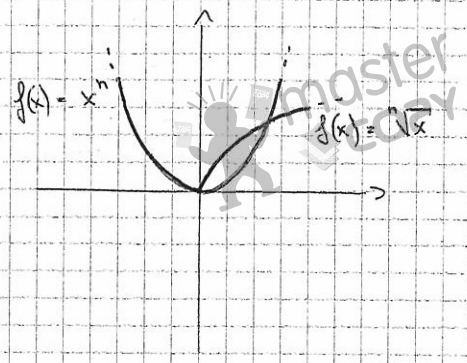
- c prende il nome di elemento separatore di A e B.
- c può appartenere ad A e/o a B. Se appartiene ad entrambi è unico.

master COPY

FUNZIONI ELEMENTARI

1) POTENZA : $f(x) = x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

a. Se n è PARI :

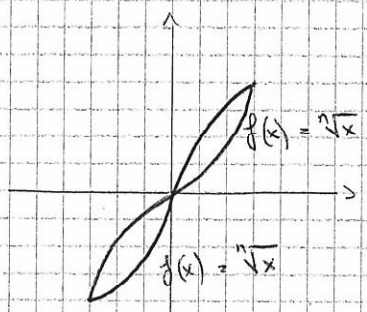


- no iniettiva / suriettiva
- la funzione è pari
- per invertirla devo restringere DOMINIO e CODOMINIO a $\mathbb{R} \geq 0$.

↓

INVERSA è definita $\sqrt[n]{x}$ e il grafico è simetrico rispetto alla bisettrice del 1° quadrante

b. Se n è DISPARI :



- È iniettiva / suriettiva
- la funzione è dispari
- INVERSA è definita $\sqrt[n]{x}$ ed è simetrica rispetto alla bisettrice.

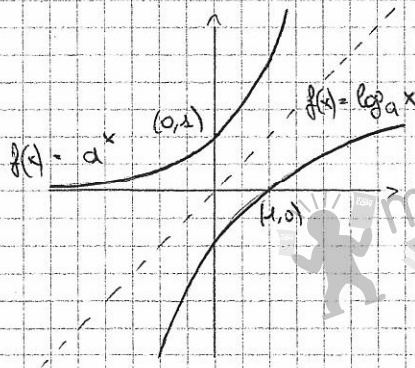
N.B. Se $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, l'inversa è definita $\sqrt[n]{x^m}$:

- con n pari $\quad x^m \geq 0$ $\quad \begin{cases} m \text{ pari} & \forall x \in \mathbb{R} \\ m \text{ dispari} & x \geq 0 \end{cases}$
- con n dispari $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) ESPONENZIALI : $f(x) = a^x$ con $a > 0$

Hanno diverso comportamento a seconda che a sia $> 0 < di\ 1$.

a. Se $a > 1$:



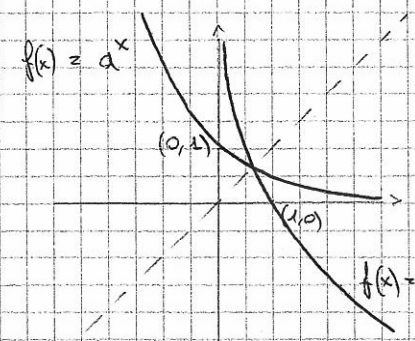
- Non presenta particolari simmetrie
- È iniettiva
- Non è suriettiva
- Per iniettività restringo il codominio a $\mathbb{R} > 0 = (0, +\infty)$

↓

INVERSA è il LOGARITMO $\log_a x$, il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice.

- Al variare di $a > 1$, il grafico a^x passa sempre per $(0, 1)$ e $\log_a x$ passa sempre per $(1, 0)$.

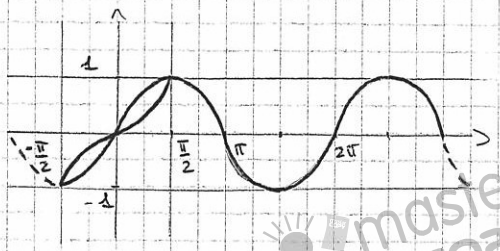
b. Se $0 < a < 1$:



- Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y di $f(x) = a^x$ con $a > 1$.

3) TRIGONOMETRICHE :

a. $f(x) = \sin(x)$:



- È periodica di 2π
- È dispari ($\sin(-x) = -\sin(x)$)
- No iniettiva / suriettiva
- Per invertirla restringo il dominio a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e il codominio a $[-1, 1]$.

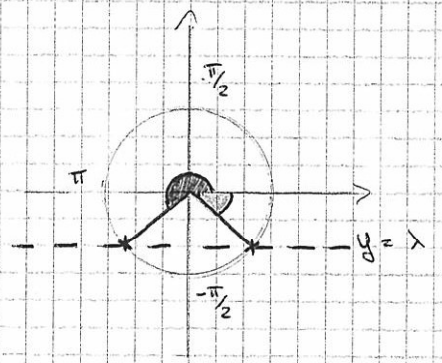
↓

INVERSA è definita ARCOSENO

$\arcsin(x)$.

- Arcoseno è definito come l'angolo tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ che ha seno = a x.

Interpretazione con circonferenza goniometrica :



$\sin(x)$ = ordinata

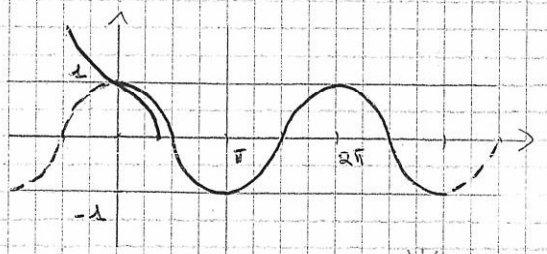
$\arcsin(x)$ = ?

↓

Devo considerare l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

(Quello blu).

b. $f(x) = \cos(x)$:



- È periodica di 2π
- No iniettiva / suriettiva
- Per invertirla restringo il dominio a $[0, \pi]$ e il codominio a $[-1, 1]$

↓

INVERSA è definita ARCOCOSENO

$\arccos(x)$