ANALISI I a.a. 2019/2020

■ Teoria delle funzioni reali di 1 variabile reale

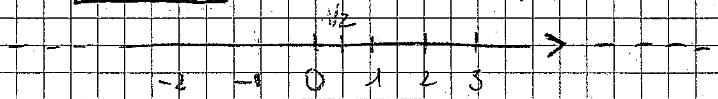
Programma generale:
- richiami e preliminari
- limiti
- derivate
- integrali
- equazioni differenziali

- numeri complessi
- successioni
- serie numeriche

---

irrazionali = non quoziente di due numeri interi

$\mathbb{R} = \boxed{\text{INSIEME}}$ DEI N. REALI (retta reale)



↳ non ci sono buchi

INSIEME = è una "scatola" con dentro degli elementi

ES. $A = \{1, 3, 12, 27, a, \square\}$

A → insieme

↳ elementi (elenco)

- l'ordine degli elementi non conta
- le ripetizioni non contano es. $\{1,2,2\} = \{1,2\}$

ES. $B = \{\text{interi positivi dispari}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

↳ elementi (proprietà) → (MIGLIORE)

→ Si mette tra parentesi perché la descrizione per elenco è meno precisa perché non si ha la certezza di come procede

Notazione: $a \boxed{\in} A$ = a è un elemento di A

$\in$ → appartiene

$a \notin A$ = a NON è un elemento di A

ES. $A = \{1, 3, 5\}$ ha $1 \in A$
e $2 \notin A$

$\boxed{\text{SOTTOINSIEME}}$ = B è sottoinsieme di A → $\boxed{B \subseteq A}$ → Contenuto / uguale

se ogni elemento di B è anche elemento di A.

ES. $A = \{1,2,5\}$ $B = \{1,5\}$ $C = \{1,3\}$

allora $B \subseteq A$ ma $C \not\subseteq A$ perché $3 \in C$ ma $3 \notin A$

→ $B \subseteq A$ comprende il caso che $B = A$

Quindi $A \subseteq A$ è vera per ogni insieme A

(stessa cosa per $\leq$ tra i numeri: $1 \leq 3$, $3 \leq 3$ sono VERE)

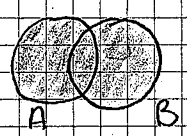
→ Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$ si dice STRETTAMENTE CONTENUTO

$\boxed{\text{INSIEME VUOTO } \emptyset}$ = è l'unico che non ha nessun elemento

OPERAZIONI

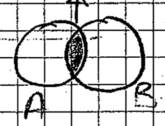
A, B insieme

1. UNIONE $\cup$ → elementi di A oppure di B (non è esclusivo)

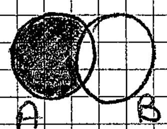


2. INTERSEZIONE $\cap$ → intersezione elementi di A e B

può anche essere vuoto



3. SOTTRAZIONE $\setminus$ → elementi di A che non stanno in B
   → basta togliere $A \cap B$



ES. $A = \{1,2,3,5\}$ $A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$

$B = \{1,2,7\}$ $A \cap B = \{1,2\}$

$A \setminus B = \{3,5\}$

4. PRODOTTO CARTESIANO $\times$ → è l'insieme formato dalle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$, $b \in B$

⚠ $(a,b) \neq (b,a)$ se $b \in B \setminus A$, (b,a) non ha senso in $A \times B$

Es. $A = \{1,2\}$

$B = \{2,3,4\}$

$$A \times B = \{(\underset{\text{di } A}{1},\overset{\text{di } B}{2}),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$ **PRODOTTO CARTESIANO**

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

sono elementi diversi perche' sono coppie ordinate.

Notazione: **Se** A e' **finito**, il n. dei suoi elementi si indica con $|A|$ (**CARDINALITA'**)

Es. **A, B** insieme finiti, ALLORA **$A \times B$** e' finito

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

INSIEME DELLE PARTI: A e' un insieme, **P(A)** e' insieme delle parti di A

P(A) = e' l'insieme i cui **elementi** sono tutti i **sottoinsiemi** di A

$$P(A) = \{\text{insieme } B \mid B \subseteq A\}$$

$\mid$ → tali che

ES. $A = \{1,2\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

unici elementi di A

→ tutto A e' sottoinsieme di se stesso

Se A e' finito, allora P(A) e' finito
⇒ si puo' calcolare la cardinalita'

$$P(A) = 2^{|A|}$$

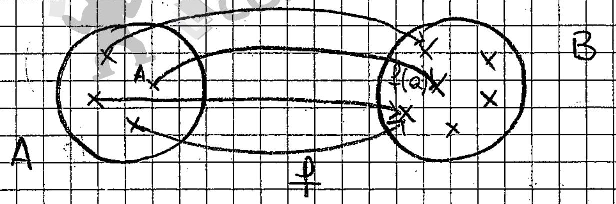
FUNZIONI

= $f: A \to B$ è:

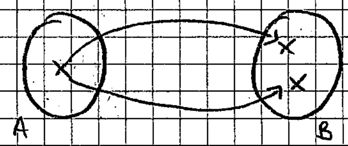
una "regola"/ formula che a

- A è un insieme di partenza
- B è un insieme di arrivo
- ogni elemento a di A associa UN unico elemento di B

$\hookrightarrow f(a) \in B$



La cosa "proibita" è:



NON È UNA FUNZIONE

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} = f(x) = x^2$; $f(a) \in B$

$\mathbb{R} = A$, $\mathbb{R} = B$

$\hookrightarrow a \in A$ = elemento dell'ins. di partenza

$\hookrightarrow$ gli insieme A, B sono parte della definizione di una funzione

$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} = g(x) = x^2$ È DIVERSA DA f PERCHÉ L'INSIEME DI PARTENZA È DIVERSO

INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ

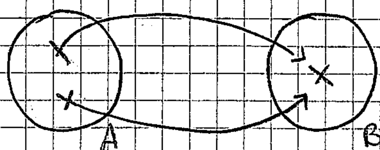
- $f: A \to B$ SI DICE INIETTIVA se

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$(a_1, a_2 \in A)$ allora/implica

Oppure se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

[f non manda elementi diversi di A nello stesso elemento di B]



Graficamente sto escludendo

ES. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ NON È INIETTIVA PERCHÉ

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\}$$ due elementi diversi di A rimandano allo stesso elemento di B.

$g: \mathbb{R}_{x \geq 0} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$ È INIETTIVA

bisogna verificare che se $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

(DIMOST.: $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$)

se entrambi sono ≥ 0,

allora $x = y$.