Analisi

28-9-2011

Dimostrazione per Assurdo:

$P \Rightarrow Q \iff (\neg P \vee Q)$

- Dire che P è vera se, e solo se, è vera Q si scrive:

$P \Leftrightarrow Q$

$P \Leftrightarrow Q$ vuol dire $[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$

Esempio:

P: n^2 è pari
Q: n è pari
} Teo. n^2 è pari se, e solo se, n è pari

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Ipotesi (Ip): n^2 è pari

Tesi: n è pari

- Per ipotesi K è pari $\rightarrow n^2 = n^2 - 1 + 1 = (n^2 - 1) + 1 =$

$= (n-1)(n+1) + 1 = K$

$(n-1)(n+1) = \boxed{K-1}$ = è dispari

$(n+1) \wedge (n+1)$ sono dispari, allora n è pari

Tutto ciò dimostra che la tesi implica l'ipotesi e viceversa

$P(x): x^2 - 1 > 0 \rightarrow P(1): 1^2 - 1 > 0$ è falso

$P(4): 16 - 1 > 0$ è vero

$\boxed{P(x): \; x > 0}$

$\exists x: P(x)$ vuol dire: Esiste x tale che $x > 0$

$\forall x: P(x)$ vuol dire: per ogni x tale che $x > 0$

$\exists x \; \exists y : Q(x;y)$
$\exists y \; \exists x : Q(x;y)$
} Sono equivalenti

$\forall x; \exists y : P(x;y)$
$\exists x; \forall y : P(x;y)$
} Sono diversi

Proposizioni

Voglio negare la proposizione:

$$\neg(\forall x\ \exists y : P(x;y)) \iff \exists x\ \forall y\ \neg P(x;y)$$

$$\neg(\exists x\ \forall y : P(x;y)) \iff \forall x\ \exists y : \neg P(x;y)$$

$$\neg[\forall x\ \exists y : x \geq y] \iff \exists x\ \forall y\ \ x < y \qquad [\neg(\geq) \to <]$$

Insiemi

a è elemento dell'insieme $A \to a \in A$

$A \subset B \to \forall x \in A \qquad x \in B = \forall x \qquad x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \not\subset B \to \exists x \in A \qquad x \notin B = \exists x : \neg(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$$\exists x : x \in A \wedge x \notin B$$



$A \cap B$



$A \cup B$

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ $\qquad A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Proprietà distributive

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

→ Al posto dell'uguale $=$ si può sostituire con $\subset$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Dimostrazione ②

① Ipotesi $\forall x$

Tesi: $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Downarrow$

$x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge C)$

② Ip. = $\forall x$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$ Tesi $x \in A \cap (B \cup C)$

$\downarrow$

$x \in (A \wedge B) \vee x \in (A \wedge C) \rightarrow$

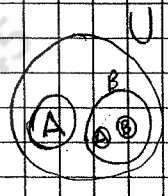
$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\downarrow$

$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745



• $A, B \subset B$ A & B Insiemi contenuti in U.

$CuA = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} = U \setminus A \rightarrow$ complementare U di A

$\Downarrow$

tutti quegli elementi che formano U eccetto l'insieme A.

$CuB = \{x : x \in U \wedge x \notin B\} = U \setminus B$ complementare U di B.

$Cu(A \cup B) = CuA \cap CuB$

$Cu(A \cap B) = CuA \cup CuB$

Successioni:

(Assiomi di Peano sull'insieme dei Naturali)

① Esiste un primo elemento

② Ogni elemento ammette un successivo

③ Il primo elemento non è successivo di nessun altro

④ Elementi diversi hanno diversi successivi

⑤ Se un sottoinsieme A contiene il primo elemento e se contiene il successivo di ogni elemento coincide con tutto l'insieme.

(IN) Numeri Naturali

① $1 \in \mathbb{N}$

② $\forall n,\ s(n) \in \mathbb{N}$

③ $\forall n,\ s(n) \neq 1$

④ $\forall n, \forall m\ \ n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m)$

⑤ $\forall A \subseteq \mathbb{N},\ \{1 \in A \wedge [n \in A \Rightarrow s(n) \in A]\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$

[$s(n)$ è il successivo di n]

Principio di Induzione

Sia $P(n)$ predicato definito in $\mathbb{N}$, supponiamo che:

① $P(1)$ è vera

② $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Allora

$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ è vera

↓

Dimostrazione $A \subseteq \mathbb{N}$ tale $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vero}\}$

per l'ipotesi (1) $1 \in A$, perché vale $P(1)$ se $n \in A$

significa che è vero $P(n)$ per (2) significa $P(n+1)$ vero,

Allora $(n+1) \in A$ per (5) $A = \mathbb{N}$, avremo $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ è vero.

ANALISI — 29-09-2011

Principio di Induzione

Sia $P(n)$ definita su $\mathbb{N}$, supponiamo che

① $P(n)$ è vera

② $\forall n \in A$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

allora $\forall n \in \mathbb{N}$, vale $P(n)$

• Forma più generale:

Sia $P(n)$ definita su $\mathbb{N}$

① $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $P(k)$ è vera

② $\forall n \geq k$ $P_n \Rightarrow P(n+1)$

allora $\forall n \geq k$ $P(n)$ è vera

• Determinare che:

$P(n): 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ $n=1$

Induttività della proposizione

Ip. $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, Tesi: $1+2+\dots+n+(n+1)$ ↓ $\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$

Ma allora:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{[(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2}$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \overset{\text{UGUAGLIANZA}}{=} \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745