ANALISI I

- A si dice limitato superiormente se:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x \leq M$$

- A si dice non limitato superiormente se:

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists x \in A \quad x > M$$

- A si dice limitato inferiormente se:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x \geq M$$

- A si dice non limitato inferiormente se:

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists x \in A \quad x < M$$

- A si dice limitato se

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \quad m \leq x \leq M$$

- Un numero reale $\overline{M}$ si dice massimo dell'insieme A se:
  - $\forall x \in A, \; x \leq M$
  - $M \in A$
- Un numero reale $\underline{m}$ si dice minimo dell'insieme A se:
  - $\forall x \in A, \; x \geq m$
  - $m \in A$

MASSIMO è un particolare maggiorante.
MINIMO è un particolare minorante.

- Un numero reale L si dice estremo superiore di $A \subseteq \mathbb{R}$:
  - $\forall x \in A : x \leq L$
  - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in A : L - \varepsilon \leq \bar{x}$
- Un numero reale l si dice estremo inferiore di A se:
  - $\forall x \in A : x \geq l$
  - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in A : l + \varepsilon \geq \bar{x}$

$\sup A$ e $\inf A$ non devono per forza appartenere ad A.

- Assiomi algebrici
- Assiomi di ordinamento
- Assioma di continuità

ASSIOMA DI CONTINUITÁ

- $A \subset \mathbb{R}$ A è limitato superiormente $\exists \sup A = L$
- $A \subset \mathbb{R}$ A è limitato inferiormente $\exists \ l = \inf A$

$l, L \in \mathbb{R}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

- $P(1)$ è vera
- $\forall n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ è vera è vera anche $P(n+1)$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

FORMA ALTERNATIVA: - $\exists n_0 \in \mathbb{N} : P(n_0)$ è vera

- $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0$ se $P(n)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

$n = n_0 + k - 1$ con $n, k \in \mathbb{N}$

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE

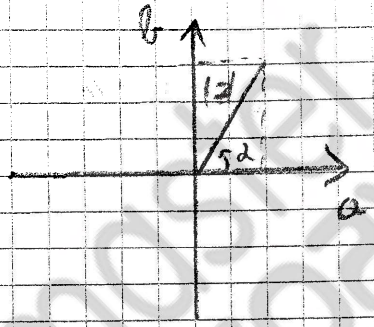
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

NUMERI COMPLESSI

$i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$

$z = a + ib$



$\begin{cases} tg\,\alpha = \frac{b}{a} \\ |z| = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

α Arg $-\pi < \alpha \leq \pi$

α Arg multipli interi di 2π

$z = a + ib$

$a = z \cos\alpha \iff \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$b = z \sin\alpha \iff \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = a + ib = z\cos\alpha + iz\sin\alpha = z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$a + ib$: cartesiana; $z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$: polare

MOLTIPLICAZIONE:
- PRODOTTO TRA I RAGGI
- SOMMA TRA GLI ARGOMENTI

LEGGE DI DEMOIVRE: $z^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

$z \cdot z' = \rho\rho'[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$z = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$ / RADICI N-ESIME

$z^n = \rho^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$

$z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\beta = \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{z^n} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Successioni

Successione per ricorrenza $l_{k+1} = l_k + k + 1$

Successione in forma chiusa n^2 con $n \in \mathbb{N}$

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ → indice muto

$\prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot j = j!$

$a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n =: \prod_{j=0}^{n} a_j$

$0! = 1$ per definizione

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

- base
- passo induttivo

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) \end{cases}$$

PERMUTAZIONI

Es: ABC $n = 3$

ABC BAC BCA
ACB CAB CBA

$n! = 3! = 6$

Disuguaglianza di Bernoulli

SUPPONGO $P(n)$ vera → DIMOSTRO $P(n+1)$ vera

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \geq 0$$

$$(1+x)^n \geq 1 + (nx) \quad \text{ipotesi vera}$$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2$$

$$nx^2 \geq 0 \qquad 1 + x + nx \leq 1 + x + nx + nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$