INCERTEZZA DI MISURA

Parametro che caratterizza la dispersione dei valori che sono attribuiti a un misurando, sulla base delle informazioni utilizzate (questo parametro è la deviazione standard)

Viene trattata con 2 APPROCCI

PARADIGMA FREQUENTISTA (o oggettivista)

Si basa su uno schema che vuole valutare l'incertezza di misura in modo oggettivo, a partire da un analisi statistica delle occorrenze certe avvenute nel passato

PARADIGNA BAYESIANO (o soggettivista)

Si basa sul conoscere la lettura (misura) e chiedersi quale sia il suo VALOR VERO

Il valor vero di una grandezza è considerato unico e, nella pratica, inconoscibile.

È il valore che caratterizza una grandezza perfettamente definita, a delle specifiche condizioni di contorno

VARIANZA

(empirica / campionaria)

È un dato che esprime la qualità di una misura

$$S^2 = \frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{m-1}$$

dove $\bar{R} = \frac{\sum R_i}{m}$

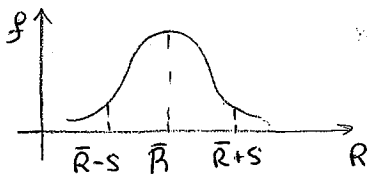
DEVIAZIONE STANDARD

$$S = \sqrt{S^2_{mH}}$$

Scarto tipo (varianza empirica → S)

Il valore della nostra misura ("vero") sarà all'interno di questo intervallo

$$R = \underbrace{\bar{R} \pm S}_{\text{INTERVALLO DI CONFIDENZA}}$$



DEF. DI PROBABILITÀ

- **CLASSICA** (def. di Laplace)

$$p = \frac{\text{n° casi favor.}}{\text{n° casi possibili}}$$

- **FREQUENTISTA**

$$p \simeq \frac{\text{n° prove con esito favor.}}{\text{n° totale prove}}$$

LEGGE EMPIRICA DEL CASO

In una serie di prove ripetute nelle stesse condizioni un gran numero di volte, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza relativa circa = alla sua probabilità
(l'approssimazione migliora con il n° delle prove)

$$p = \lim_{N \to \infty} \frac{N_E}{N}$$

Altro modo di dirla:
LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO È IL LIMITE A CUI TENDE LA FREQUENZA RELATIVA DELL'EVENTO AL CRESCERE DEL N° DEGLI ESPERIMENTI

PROPRIETÀ

A = puntata

S = vincita

$M = p(E) \cdot S$ speranza matematica / previsione di vincita

$M = A$ significa SCOMMESSA COERENTE
(quindi più $\frac{M}{A}$ è vicino a 100% più il gioco è equo)

$$\left.\begin{aligned} \Phi(G) &= M_{TOT} - A_{TOT} \\ &= \sum_i p(E_i) S_i - A_{TOT} \end{aligned}\right\} \text{PREVISIONE DI GUADAGNO}$$

La scommessa è coerente quando $\Phi(G) = 0$

DEF. DI PROBABILITÀ (SOGGETTIVISTA)

La probabilità di un evento E è definita come la misura del grado di fiducia in E espressa da un numero reale P, tale che una scommessa di questa P su E sia coerente

REGOLA DELLA PENALIZZAZIONE O DI BRIER

PENALIZZAZIONE $(|E| - p(E))^2$ $\begin{cases} (1-p)^2 \\ (0-p)^2 \end{cases}$

PREVISIONE DI PENALIZZAZIONE:

$$L(|E| - p(E))^2 = (|E|-p)^2 p + (|\bar{E}| - p)^2 q$$

dove $|E| = \begin{cases} 0 & \text{(evento non accade)} \\ 1 & \text{(evento accade)} \end{cases}$

p = prob. dell'evento E

q = prob. dell'evento $\bar{E} = 1-p$

$$L_p = (1-p)^2 p + (0-p)^2$$

$$= (1-2p+p^2)p + p^2 = p - p^2 = \boxed{p(1-p)}$$

La penalizzazione si riduce se la scommessa è fatta sul valore medio.

PARADOSSO DEL COMPLEANNO (1939 Vom Hises)

Esprime la probabilità che almeno due persone in un gruppo compiono gli anni lo stesso giorno:

23 persone → $p = 0{,}51$

30 persone → $p = 0{,}70$

50 persone → $p = 0{,}97$

(per evento certo $p=1$, occorrono 366 persone)

$$p(E) = 1 - \frac{364!}{365^{p-1}(365-p)!}$$

p = n° di persone

probabilità che tutti i compleanni cadano in date diverse

PROBABILITÀ CONGIUNTA

$p(A \cap B)$ = prob. che si verifichi sia A sia B

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

→ Si ricava la prob. condizionata con la formula inversa.

LEGGE DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE

EVENTI INDIPENDENTI

Se $\begin{cases} p(A|B) = p(A) \\ p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \end{cases} \Rightarrow$ A e B indipendenti.

LEGGE DELLE ALTERNATIVE

$$p(E) = \sum_i p(E \cap H_i)$$

se $\begin{cases} \cup H_i = \Omega \text{ (unione degli eventi è lo spazio totale)} \\ H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \text{ (inters. degli eventi nulla)} \end{cases}$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ se i due eventi sono incompatibili (cioè se l'inters. è nulla e quindi non possono verif. contemporaneam.)

dove H_i = classe di eventi completa

TEOREMA DI BAYES

Probabilità di un evento condizionata ad un altro è:

$$p(H_i|E) = \frac{p(E|H_i) \cdot p(H_i)}{\sum_i p(E|H_i) \cdot p(H_i)}$$

VEROSIMIGLIANZA — PROB. A PRIORI

PROBAB. A POSTERIORI — Probabilità finale ∝ Verosimiglianza

VARIANZA

È definita come il VALORE ATTESO DEL QUADRATO DEGLI SCARTI

$$Var(x) = E((x-\mu))^2 = \sigma^2$$

μ = media dell'intera popolazione

$E(x) = \mu$

$$Var(x) = E((x-\mu)^2) = E(x^2 - 2x\mu + \mu_x^2) = E(x^2) - 2\mu E(x) + = E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 =$$

$$= E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$ → altra espressione per calcolare la varianza

COVARIANZA

$$Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

Se $cov = 0$, x e y non sono correlate

N.B.: INDIPEND. ⇒ SCORRELAZ.

SCORRELAZ. ⇏ INDIPEND.

DISTRIBUZIONE MARGINALE di x e di y

$$f(x) = \sum_y f(x,y)$$

$$f(y) = \sum_x f(x,y)$$

dove $f(x,y)$ = probab. congiunta

$f(x,y) = f(x|y) f(y)$

VALORE ATTESO

$$E(x,y) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y)$$

$$E(x) = \sum_x x f(x) \qquad E(x^2) = \sum_x x^2 f(x)$$

$$E(y) = \sum_y y f(y) \qquad E(y^2) = \sum_y y^2 f(y)$$

(Conoscendo questi posso calcolare varianza e covarianza) → E' un operatore lineare

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\,Var(y)}}$$

MEDIA E VARIANZA CAMPIONARIE

Siano n valori x_i indipendenti e identicamente distribuiti con media μ e varianza σ^2

MEDIA CAMPIONARIA $\quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

VARIANZA CAMPIONARIA $\quad S^2_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n-1}$

La media campionaria e la varianza campionaria sono stimatori che dipendono dai dati
=> sono variabili casuali !

PROPRIETA' DELLA MEDIA E VARIANZA CAMPIONARIE

$E(\bar{X}) = \mu$ → Si dice che la media campionaria è uno STIMATORE NON POLARIZZATO

(Uno stimatore $\hat{\theta}$ di un parametro θ è detto non polarizzato se $E(\hat{\theta}) = \theta$, cioè il suo valore atteso è proprio θ)

$E(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ → STIMATORE POLARIZZATO (distorto)

$E(S_{n-1}^2) = \sigma^2$ → STIMATORE NON POLARIZZATO (corretto)