Sommario

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 3

CALCOLO PROBABILITÀ INIZIALE 8
Caso Discreto *8*
Caso Continuo *9*

SISTEMI DI ALTERNATIVE 10

FORMULA DI BAYES 12
PROBABILITÀ DELLE CAUSE 13
FUNZIONE DI RIPARTIZIONE E FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA 18
TRASFORMAZIONI DI VARIABILI ALEATORIE 21
Composizione di una variabile aleatoria con funzioni *21*
Variabili Congiunte *21*
Caso Discreto 22
Caso Continuo 24
DENSITÀ ESPONENZIALE 25
Funzione di Sopravvivenza *26*
INDIPENDENZA 28
QUANTILI 30
VALORE ATTESO, MEDIANA, VARIANZA 31
Proprietà valore atteso *35*
Proprietà varianza *36*
Proprietà covarianza *37*
Proprietà matrice generatrice dei momenti *38*
VARIABILI BINOMIALI 39
VARIABILI GAUSSIANE 40

CAMBI DI VARIABILE 41

DENSITÀ WEIBULL 42
CONVERGENZA DI VARIABILI 44

SPAZI DI HILBERT 49

PROCESSI STOCASTICI 52

CATENE DI MARKOV 54

PROPRIETÀ DI MARKOV 55
DISTRIBUZIONI (O DENSITÀ) DISCRETE O INVARIANTI 59
CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI 60
PROPRIETÀ DI MEMORIA 65

PROCESSI DI MARKOV A SALTI 66

CASI PARTICOLARI (CODE MARKOVIANE) 71
PROCESSI STOCASTICI A TEMPI DISCRETI E SPAZI CONTINUI 73
Equazione lineare con smorzamento esponenziale (S.E.) *77*

SERIE STORICHE **79**

METODO DI HOLT-WINTERS 82
Smorzamento Esponenziale (S.E.) *82*
Smorzamento esponenziale con trend (S.E.T.) *83*
Smorzamento esponenziale con trend e stagionalità (S.E.T.S) *84*
METODI AUTOREGRESSIVI 85
STUDIO TEORICO DEI MODELLI AUTOREGRESSIVI 86
Processo ARIMA(p,d,q) *91*

ANALISI DI FOURIER **93**

SPAZI L^p 93
CONVOLUZIONE / FILTRAGGIO 94

ESERCITAZIONI **96**

ESAME DEL 11/01/2012 102
Esercizio 3 ..... *102*
ESAME DEL 10/01/2018 104
Esercizio 3 ..... *104*
ESAME DEL 31/01/2018 106
Esercizio 1 ..... *106*
Esercizio 2 ..... *109*
ESERCITAZIONE 8/11/2018 113
ESERCITAZIONE DEL 12/11/2018 115
ESERCITAZIONE DEL 19/11/2018 117
Esercizio 1 ..... *117*
Esercizio 2 ..... *118*
Esercizio 3 ..... *119*
ESERCITAZIONE 22/11/2018 122
ESAME DEL 26/11/2018 127
Esercizio 1 ..... *127*
Esercizio 2 ..... *128*
Esercizio 3 ..... *129*

SOFTWARE R STUDIO **132**

ESERCITAZIONE #1 132
ESERCITAZIONE #2 138
ESERCITAZIONE #3 147
ESERCITAZIONE #4 153
ESERCITAZIONE #5 157
ESERCITAZIONE #6 168
ESERCITAZIONE #7 176
ESERCITAZIONE #8 185

DOMANDE DI TEORIA DEL COMPITO SCRITTO **197**

DOMANDE DI TEORIA DELL'ORALE **198**

master COPY

master COPY

Calcolo delle probabilità

L'**approccio intuitivo** dice la probabilità P di una certa affermazione A, P(A|I), che indica il grado di fiducia del fatto che A sia vera, sapendo, quindi dando per vero, che l'informazione I sia vera.

Nell'approccio intuitivo la probabilità è sempre condizionata ad un'informazione che sappiamo essere vera.
Quindi A è l'elemento di cui vogliamo dare il grado di fiducia.

Se per esempio A="oggi piove", se mi affaccio dalla finestra e vedo che non piove, il grado di fiducia sarà minimo, se però I fosse un'informazione incompleta, per esempio I = "oggi la temperatura è T=20°C", questo tipo di informazione, da un punto di vista logico, non permette di dire esattamente se A sia vera o se A sia falsa.
Quindi, la probabilità misura il grado di fiducia di quanto è vera A sapendo che I è vera.

Solitamente, visto che per convenzione si indica con: Vero = 1; Falso = 0; allora il grado di fiducia interpola tra i due e la probabilità P(A|I) è sempre un numero $\in[0;1]$.
Si dice che quando:

P(A|I) = 1 → l'evento A è quasi certamente vero;
P(A|I) = 0 → l'evento A è quasi certamente falso;

Perché si dice quasi certamente?
Perché la probabilità, in realtà, non si occupa di dire se una cosa è esattamente vera o falsa.

NON SI CONFONDA LA PROBABILITA', CHE È UN GRADO DI FIDUCIA, CON IL RAGIONAMENTO LOGICO DEDUTTIVO, DOVE SI PARTE DA ASSIOMI E SI FANNO DEDUZIONI. TUTTO CIO' CHE SI DEDUCE IN MATEMATICA È SICURAMENTE VERO.

Come tutti i sistemi di tipo logico ci sono delle regole di calcolo intuitive, vediamole brevemente:

1. Regola #0: se l'evento A è sicuramente vero, qualunque sia I, allora P(A|I) = 1;
   se l'evento A è sicuramente falso, qualunque sia I, allora P(A|I) = 0;

   NON È VERO IL VICEVERSA DI CIASCUNA.

2. Regola della somma: se A e B sono due affermazioni incompatibili, ossia "A e B" è sicuramente falsa (per esempio se lanciando una moneta A = "esce testa" e B = "esce croce"), se accade A non accade B e viceversa, allora

   $$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I)$$

Detta anche *Additività della probabilità*, non è vera se gli eventi non sono incompatibili.

3. Regola del prodotto o Composizione: se A e B sono affermazioni qualunque, senza alcuna restrizione, supponendo che I sia vera, la probabilità che siano vere entrambe è

$$P(A \text{ e } B|I) = P(A|I) \cdot P(B|I \text{ e } A) = P(B|I) \cdot P(A|I \text{ e } B)$$

NON SI PUO' FARE IL PRODOTTO DELLE DUE PROBABILITA'.

Queste sono le regole intuitive, ossia regole minimali a cui seguono tante altre regole di calcolo. Vediamone alcune:

- $P(A|I) + P(\text{non } A|I) = 1$

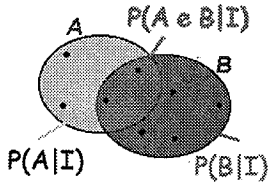
Perché se A = "c'è il sole" e B = non A = "non c'è il sole", siamo nella situazione di due eventi incompatibili. Quindi quando andiamo a fare P(A oppure B) è sempre vera, ma quindi

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I) = 1$$

Quindi questa regola è verificata per la Regola #0.

- Regola della somma generale nel caso in cui A e B NON siano incompatibili:

$$P(A \text{ oppure } B|I) = P(A|I) + P(B|I) - P(A \text{ e } B|I)$$

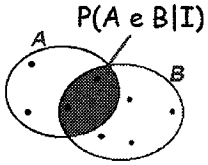


Ossia si deve togliere la probabilità che siano vere entrambe.
L'insieme A contiene tutti gli eventi in cui l'affermazione A è vera.
Lo stesso vale per l'insieme B.

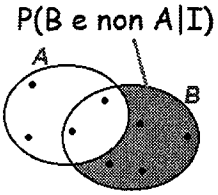
L'idea di Kolmogorov è che c'è un collegamento tra la teoria dell'area e la probabilità.

Perché si pensa alla probabilità come un'area?
Perché questa formula della somma (in realtà anche quella del prodotto) si visualizzano bene in questo modo, questo ha portato alcuni matematici, tra cui Kolmogorov, a dire che la probabilità è un caso particolare di area.

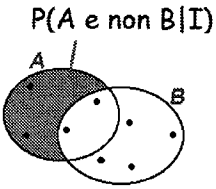
Vediamo graficamente alcune informazioni:



A e B vere contemporaneamente



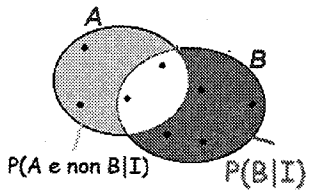
A falso e B vero



A vero e B falso

Se scelgo (A e non B) e B sono incompatibili, poiché la prima contiene "non B" e la seconda "B", quindi:

$$P[(A \text{ e non } B) \text{ oppure } B] = P(B|I) + P(A \text{ e non } B|I)$$



Ci sono dei casi molto semplici in cui ci si deve accorgere immediatamente che qualcosa non va bene.
Per esempio:

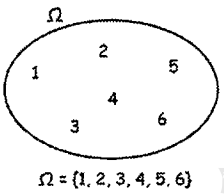
- Se $P(A|I) > \frac{1}{2}$ e $P(B|I) > \frac{1}{2}$ troviamo una P(A oppure B|I) > 1, ciò è impossibile. Da ciò si deduce che i due eventi A e B NON sono incompatibili;

- Se P(A oppure B|I) < 0, capiamo che A e B sono incompatibili quindi il termine di sottrazione va escluso dalla formula e si deve procedere solo con la somma delle due probabilità;

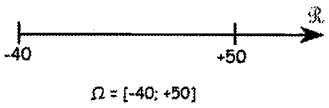
Vediamo ora il cosiddetto **approccio rigoroso**, che è un approccio più matematico che consente anche di fare un'operazione in più che è quella di passare al limite per opportuni parametri che tendono a 0 o all'∞.
Kolmogorov si accorse che la probabilità si può porre all'interno di questa teoria di misura, misura intesa come insiemi o aree.
Si propone quindi di metterla in forma rigorosa sulla base di alcuni assiomi:

0) Prima di fare un qualunque calcolo di probabilità bisogna fissare un **insieme universo Ω** che deve essere abbastanza grande da contenere, tra i suoi elementi, tutte le possibili situazioni che vogliamo considerare.

Es: lancio di un dado



Es: range di possibili temperature [°C]



Le affermazioni che andremo a considerare sono affermazioni che comprendono alcune di queste eventualità.