LEZIONE 1

27/09/2021

Libri di testo:

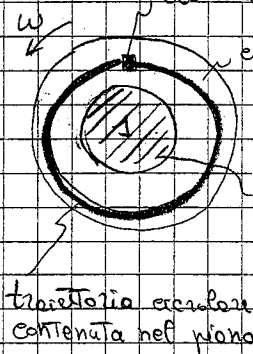
"G. K. Batchelor" "An introduction to fluid dynamics" Cambridge University Press

V. G. Levich "Physicochemical hydrodynamics"

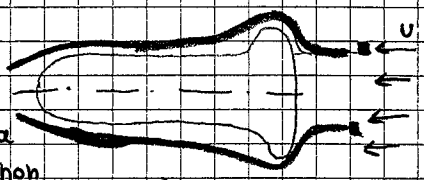
Linea di flusso: Consideriamo un fluido in moto, ed un elemento Lagrangiano, questo descrive una traiettoria che si chiama linea di flusso. Tale linea è punto x punto Tangente al vettore velocità dell'elemento Lagrangiano.



Moto bidimensionali: ogni traiettoria descritta da un elemento di fluido è contenuta in un piano.



È un moto bidimensionale piano ogni traiettoria è contenuta in piani paralleli tra loro



NOTA 1

Moto bid. non piano? Sì esiste

X corpo cilindrico ogni traiettoria è piana ma appartengono a piani non paralleli tra loro, con velocità d'incidenza allineata con l'asse

comprimibili

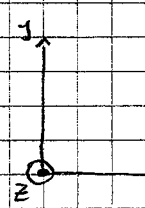
Fluidi incomprimibili: anche fluidi con velocità inferiore di un ordine di grandezza della velocità del suono (gas con N° di Mach < 0.1), oltre che fluidi incomprimibili (liquidi).

Dall'eq. di continuità (Conservaz. massa) $\boxed{\operatorname{div} \underline{v} = 0}$ $\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$

$\quad x \quad y \quad z$ = assi

$\quad u \quad v \quad w$ = comp. velocità

X un moto bidimensionale soffermandoci su un particolare piano, con asse "z" normale al piano:



l'equaz. di continuità si riduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (w = 0)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}}$$

$u(x,y,t)$ e anche $v(x,y,t)$.

Consideriamo la seguente espressione differenziale:

$$-v\,dx + u\,dy$$

(forma differenziale a due variabili)

È una f. differenziale esatta se è una forma differenziale chiusa, ovvero se "ω" è esatta $\Rightarrow$ che "ω" è chiusa

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$ dall'equazione di continuità.

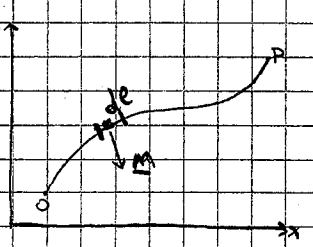
Essendo esatta esiste una funzione potenziale tale che:

$$\Psi(x,y): \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

la funzione potenziale $\Psi = \Psi(x,y,t)$ è chiamata funzione di corrente

Caratteristica della funzione "Ψ": NOTA 2

Consideriamo una curva nel piano, e la sua superficie che si sviluppa lungo z, consideriamo un flusso di fluido che attraversa questa superficie, il flusso volumetrico sarà dato da:



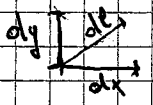
$\underline{n}$ versore normale alla superficie

$$Q = \int_S \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS = \int_S \underline{v}\,\underline{n}\,dl\,L$$

dS: elemento di superficie attraversato dal fluido

L: altezza lungo z dell'elemento di superficie

Non è una linea di corrente se non il flusso attraverso questa superficie



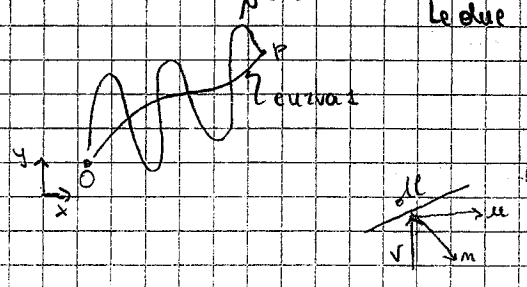
$\underline{v}$: campo di velocità

$$\Phi = L\oint_\gamma u\,dy \ominus v\,dx = L\int_0^P u\,dy - v\,dx = L\int_0^P d\Psi = \boxed{[\Psi(P)-\Psi(0)]\cdot L}$$

γ: curva (integrale di linea)

$\ominus$: lo attraversa in senso opposto rispetto a $\underline{n}$

L'integrale dipende soltanto dagli estremi della curva, indipendentemente dalla curva

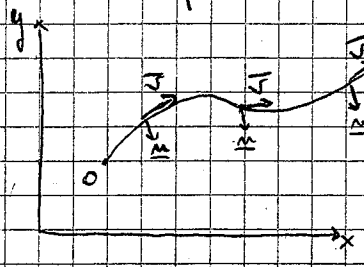


Le due curve hanno lo stesso flusso.

$\underline{v} = (u, v)$

$\underline{n} = ($

Supponiamo la curva sia una linea di corrente: (velocità Tangente alla curva) Il flusso è nullo infatti il $\underline{v}\,\underline{n}=0$ essendo $\underline{v}\perp\underline{n}$ x non abbiamo componenti lungo $\underline{n}$



Per cui: $F=0=\psi(P)-\psi(O) \rightarrow \psi(P)=\psi(O)$

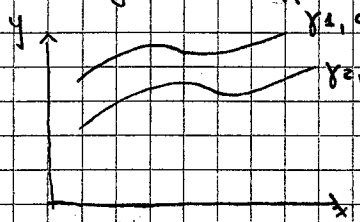
La funz. di corrente ha lo stesso valore ai due estremi.

Considerando anche un generico punto sulla curva il flusso è sempre nullo:

$$F=0=\psi(Q)-\psi(O) \rightarrow \psi(Q)=\psi(O)$$

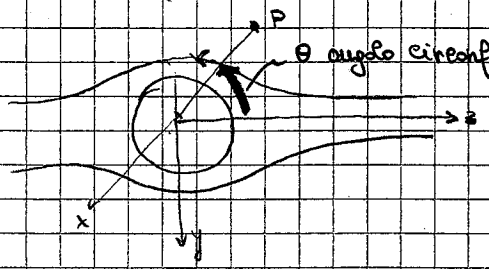
La funzione di corrente lungo una linea di corrente è sempre costante.

$\psi(x,y)=$ costante Al variare della costante ottengo curve differenti.



moti bidimensionali non piani

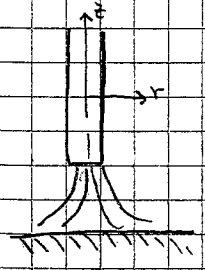
Se abbiamo un moto assialsimmetrico è preferibile usare un sist. di coordinate differenti, ad esempio per una sfera:



Un sistema di riferimento di questo tipo:
la componente azimutale è nulla, le altre invece sono diverse da zero.

Si ha che:
$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ u_\theta = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases}$$

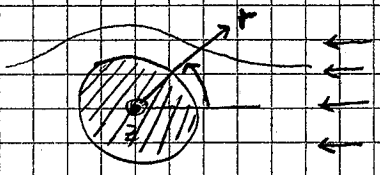
COO. SFERICHE (Considerando il caso di moti bidimensionali non piani)



COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} u_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \\ u_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{cases}$$

Cilindro ortogonale al piano del foglio



COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

È un moto bidimensionale piano invariante per "z"

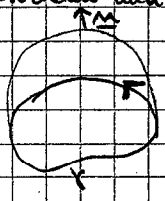
Moto potenziale: il campo di velocità è un campo conservativo.

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \qquad v_1 = v_1(\underline{x}) \quad v_2 = v_2(\underline{x}) \quad v_3 = v_3(\underline{x})$

Il campo di velocità si dice irrotazionale se $\text{rot}\,\underline{v} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \forall t$

$$\nabla \times \underline{v} = 0$$

Se il $\text{rot}\,\underline{v} = 0$ consideriamo una curva chiusa, dal Teorema di Stokes abbiamo che:



$$\int_S \text{rot}\,\underline{v}\,\underline{n}\,dS = \int_\gamma \underline{v}\,d\underline{l}$$

$d\underline{l}$: elemento di lunghezza di curva x il versore tangente alla curva di modulo unitario orientato lungo il verso di percorrenza della curva.

X un campo irrotazionale dato una curva chiusa: $\int_\gamma \underline{v}\,d\underline{l} = 0$

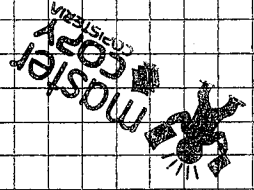
$$\oint_\gamma \left[v_x dx + v_y dy + v_z dz \right] = 0$$

↑ è l'integrale ciclico attraverso una qualunque curva chiusa della specie è nulla

Tale forma differenziale è esatta che $\oint_\gamma v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0$

X cui esiste una funzione scalare $\phi(x, y, z, t)$ che è il potenziale del campo di velocità $\underline{v}$ per cui:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$



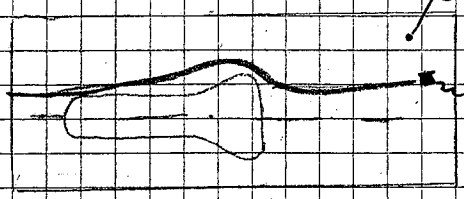
$\exists$ una funzione ϕ: $\nabla\phi = \underline{v}$

Campo potenziale ⟺ campo irrotazionale ($\text{rot}\,\text{grad}\,\phi = 0 \quad \text{grad}\,\phi = \underline{v}$)

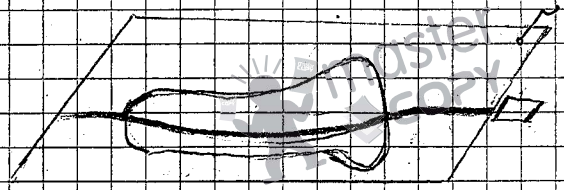
Moto solenoidale è un moto con $\text{div}\,\underline{v} = 0$ (fluido incomprimibile), se il moto è anche irrotazionale

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

NOTA 1



Consideriamo lo stesso elemento fluido con variazione dell'angolo azimutale di 90°.



MOTO BIDIMENSIONALE NON PIANO

NOTA 2

