② Tutto quello visto vale per moti bidimensionali ma incomprimibili! Per esempio, se il gas si muove a velocità più piccole di quella del suono ($v_0 \approx 50\,m/s$) si può considerare come incomprimibile (variaz. densità gas piccole rispetto alla sua densità media).

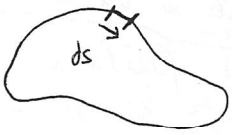
MOTO POTENZIALE

Supponiamo moto irrotazionale $\rightsquigarrow 0$ $\text{rot}\,\underline{v} = 0$ ($\underline{v}$ è un vettore) (in generale tridimensionale)

$\underline{v} \equiv v_i$ con $i = 1,2,3$ $\Rightarrow$ $(\text{rot}\,\underline{v})_i = (\underline{\nabla} \times \underline{v})_i = \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i-1}} = 0$

($\underline{\nabla}$ = NABLA è un vettore; Campo irrotazionale)

Il teorema di Stokes ci dice che:



$\oint_\gamma \underline{v}\,ds = \int_S \text{rot}\,\underline{v} \cdot \underline{n}\,dS$

- γ: integrale circolare campo di velocità
- S: superficie qualsiasi che si appoggia su linea considerata
- Se il moto è irrotazionale quindi l'integrale è $= 0$

$\Rightarrow \oint v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0$

Questa vista è un'altra condizione necessaria e sufficiente affinché un diff. le sia esatto, ovvero che l'integrale curvilineo su una qualsiasi curva chiusa sia 0.
Se è un diff. le esatto allora esiste una primitiva tale che:

$d\Phi = v_x dx + v_y dy + v_z dz \rightsquigarrow \begin{cases} v_x = \partial\Phi/\partial x \\ v_y = \partial\Phi/\partial y \\ v_z = \partial\Phi/\partial z \end{cases}$

- Φ: FUNZIONE POTENZIALE
- v_x, v_y, v_z sono il gradiente

$\Rightarrow$ **$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$** CONDIZIONE DI MOTO POTENZIALE

Ψ e Φ sono funzioni distinte.

Supponiamo moto potenziale e fluido incomprimibile.

$\text{div}(\underline{v}) = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0$ $= \nabla^2 \Phi = 0$

$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

LAPLACIANO della funzione Φ. $\Phi = \Phi(x,y,z)$

Navier-Stokes

Ho semplificato di molto i calcoli. Questa equazione
Non compare però il tempo risolvendola. Il tempo non deve essere per forza in $\nabla^2\Phi = 0$ ma può comparire anche nelle condizioni al contorno.

Vediamo quali sono le condizioni al contorno.
Ho fluido che si muove e aderisce alle pareti del corpo e le 3 componenti della velocità sono nulle → questa condizione è incompatibile con moto irrotazionale → Non ho soluzioni!

Vedo come risolverla, quindi considero moto potenziale: (ϕ è uno scalare)

$\nabla^2\phi$

$\underline{v}$ = gradiente ϕ

Considero prodotto $\phi \cdot \underline{v}$ (Vettore) (campo vettoriale) e ne prendo la divergenza:

$$\operatorname{div}(\phi\cdot\underline{v}) = \phi \cdot \operatorname{div}\underline{v} + \underline{v}\,\nabla\phi = \underline{v}^2$$

($\operatorname{div}\underline{v} = 0$ fluido incomprimib.; $\underline{v}\,\nabla\phi = \underline{v}^2$)

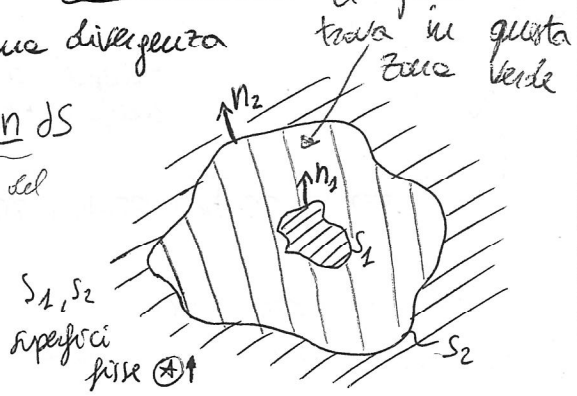
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\phi\cdot\underline{v}) = \underline{v}^2}$$

⊛ Se S_1 ed S_2 sono superfici fisse $\Rightarrow \underline{v}\cdot\underline{n}_1 = \underline{v}\cdot\underline{n}_2 = 0$ da cui $\underline{v}=0$, cioè non ci può essere moto irrotazionale di un fluido incomprimibile in un dominio limitato da pareti fisse

Adesso integro sul volume:

$$\int_V \operatorname{div}(\phi\cdot\underline{v})\,dV = \int_V \underline{v}^2\,dV = \int_S \phi\cdot\underline{v}\cdot\underline{n}\,dS$$

(Per teorema divergenza; flusso del vettore)



$$\boxed{\int_{S_2} \phi\,\underline{v}\cdot\underline{n}_2\,dS_2 - \int_{S_1} \phi\cdot\underline{v}\cdot\underline{n}_1\,dS_1 = \int_V \underline{v}^2\,dV}$$

→ c'è il meno perché il versore n_1 punta verso il fluido e noi avevamo detto che la normale era quella che puntava dal fluido verso l'esterno → ho $-n_1$ e non n_1.

$\nabla\phi^2 = 0$ → eq. di cui voglio trovare soluzione

$\underline{v}_A$, $\underline{v}_B$ devo ancora trovare condizione al contorno che permette di trovare unica soluzione al problema. Quindi, se $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_B$ sono entrambe soluzione allora devono necessariamente essere uguali:

$$\underline{v}_A - \underline{v}_B \rightsquigarrow \int_{S_2} (\phi_A - \phi_B)\underbrace{(\underline{v}_A - \underline{v}_B)\cdot\underline{n}_2}_{=0}\,dS_2 - \int_{S_1} (\phi_A - \phi_B)\underbrace{(\underline{v}_A - \underline{v}_B)\cdot\underline{n}_1}_{=0}\,dS_1 = \int_V |\underline{v}_A - \underline{v}_B|^2\,dV$$

(ϕ_A, ϕ_B sono le primitive di $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_B$)

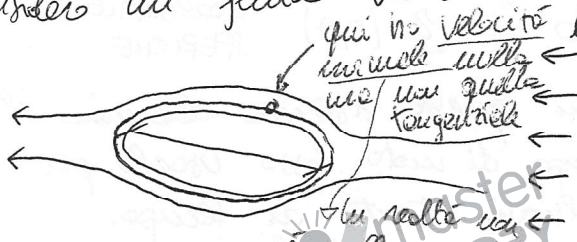
$\underline{v}_A\underline{n}_2 - \underline{v}_B\underline{n}_2$ → componente

$v_{nA} - v_{nB} = 0$ se hanno la stessa normale (sono uguali punto per punto della superficie esterna)

Se questo fa 0 allora $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_B$ devono essere uguali punto per punto anche all'interno.

Prese $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_B$, la condiz. necess. e sufficiente per avere sol. unica è che siano uguali punto per punto le loro componenti normali.

(3) Assegnata la condizione sulla componente normale della velocità => sol. unica!
Se superficie è fissa, dire che la componente normale è nulla non vuol dire che lo sia anche quella tangenziale.
Le condizioni di moto potenziale si applicano ai fluidi non viscosi!
Considero un fluido viscoso ed un corpo fisso:



Se il Re è sufficientemente elevato ($Re \gg 1$) $\exists$ strato limite (a) di dimensioni molto più piccole delle dimensioni caratteristiche del problema.

Si può dimostrare (lo vedremo) che all'esterno dello strato limite il moto è potenziale (irrotazionale) e quindi il fluido si comporta come se non fosse viscoso. All'interno, invece, ho gli effetti viscosi (velocità nulla alla parete).
Quindi:

$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\phi\cdot\underline{n} = 0 \quad , \quad \underline{x}\in S \\ &\nabla\phi = \underline{U} \quad , \quad \|\underline{x}\| \to \infty \end{aligned}\right\}$$ Sono le mie condizioni al contorno.

($\underline{x}$: vettore posizione)

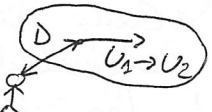
Se ho fluido fermo e corpo che trasla a velocità $\underline{U}$:



MOTO NON STAZIONARIO. La non stazionarietà sta in S perché si sposta di continuo. Un'altra non stazionarietà ce l'ho se la velocità $\underline{U}$ non è costante. Descrivo il moto visto istante per istante.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\phi\cdot\underline{n} = \underline{U}\cdot\underline{n} \quad , \quad \underline{x}\in S \\ &\nabla\phi = 0 \quad , \quad \|\underline{x}\| \to \infty \end{aligned}\right\}$$ In questo caso le condizioni al contorno cambiano

Se cambio istantaneamente la velocità del corpo, cambio istantaneamente la velocità intorno al corpo. Il tempo per cui vedo la variazione di velocità all'esterno va come $\tau \sim \frac{D^2}{\nu}$

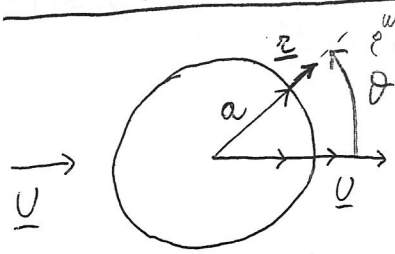


SEMPRE CASO NON STAZIONARIO

• Adesso suppongo di avere corpo che si muove di velocità $\underline{U}$, questa volta però con sist. di rif. solidale al corpo (osservatore sul corpo). In questo caso vediamo un MOTO STAZIONARIO (S è fisso).

MOTO POTENZIALE INTORNO AD UNA SFERA

02/10/18



A distanza infinita dalla sfera il fluido è fermo e la sfera si muove di velocità $\underline{U}$ rispetto all'osservatore fisso (MOTO NON STAZIONARIO).

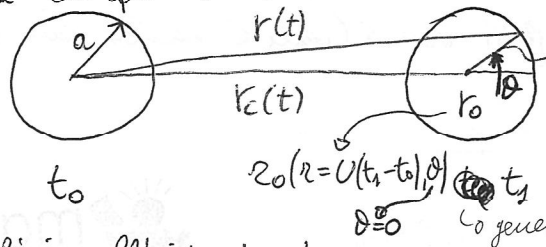
Eq. di Laplace: $\nabla^2\phi = 0$ (Eq. differenziale) $\quad \underline{r}:(r,\theta)$ COORDINATE SFERICHE

Condizioni al contorno

$$\begin{cases} \nabla\phi\cdot\underline{n} = \underline{U}\cdot\underline{n} & \text{in } S \text{ (superficie sfera)},\ r=a \\ \nabla\phi = 0 & r\to\infty \end{cases}$$

Con questo sistema determino il campo di moto. Posso usarlo per qualsiasi istante di tempo.

Il moto è non stazionario e questo lo vedo da S (si muove). All'istante iniziale il centro della sfera si trova all'origine del sistema di riferimento ed a questo istante corrisponde la condizione $r=a$. In questo modo descrivo il moto in questo istante.



Ad istanti successivi prendo un diverso sistema di riferimento (sempre nel centro della sfera) e trovo **campo di moto** all'istante successivo nel nuovo centro della sfera. Quindi vedo moto stazionario perché assumo che il sist. di rif. segue passo passo il centro della sfera.

La superficie, all'istante t_1, è una sfera che ha centro in r_0.

$r(t)$: vettore posizione di un punto che si trova sulla superficie della sfera all'istante t;

$r_c(t)$: vettore posizione del centro della sfera;

$r_f(t)$: vettore posizione raggio.

$$r(t) = r_c(t) + (a,\theta)$$

(a,θ) → Non dipende dal tempo (sarebbe r_f)

$r_c(t)$ → l'unico che dipende dal tempo è lui! Di conseguenza anche $r(t)$. $r_c(t) = (U\cdot t, 0)$

$$\boxed{\|\underline{r}(t) - \underline{r}_c(t)\| = a}$$

→ se voglio considerare il sistema nella sua non stazionarietà, la condizione $r=a$ diventa questa.

$$\phi(r,\theta,U) = \boxed{\phi(\underline{r})}\cdot\underline{U}$$

ϕ è uno scalare; $\boxed{\phi(\underline{r})}$ vettore; $\underline{U}$ vettore

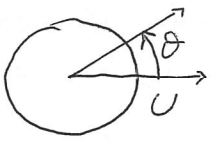
$\phi(r,\theta,U)$: POTENZIALE DEL CAMPO DI MOTO

$\phi(\underline{r})$: POTENZIALE VETTORE DEL CAMPO DI MOTO

la soluzione del campo sarà lineare ed omogenea in U in tutto lo spazio (la 1ª condizione al contorno è lineare ed omogenea in U).

Campo vettoriale indipendente da U (ho scritto proporzionalità tra scalare ϕ e vettore U)

④ Il risultato di $\phi(\underline{r})$ è (per corpo sferico):



$$\phi(\underline{r}) = -\underline{r}\cdot\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}$$ (vettore posizione)

$$\phi(r,\theta,U) = -\frac{1}{2}\underline{r}\cdot\underline{U}\left(\frac{a}{r}\right)^3$$

$$\phi(r,\theta,U) = -\frac{1}{2}Ur\cos\theta\left(\frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad ; \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

È il campo di velocità. Quindi, trovo ϕ e poi derivo rispetto ad r e θ e trovo v_r e v_θ.

Se prendo un sistema di riferimento solidale con la sfera:

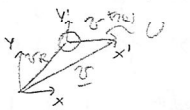


$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \nabla\phi\cdot\underline{n} = 0 \quad \text{in } S, \ \|r\| = a \quad \text{(la sfera non si muove)} \\ \nabla\phi = \bar{0}\underline{U} \qquad \|r\| \to \infty \end{cases}$$

Sfruttiamo la soluzione trovata prima rispetto al sistema fisso:

$\underline{v}^{rel} = \underline{v} - \underline{v}^{trasc.}$ (nel sistema di riferimento relativo) $\Rightarrow$ $\underline{v} = \underline{v}^{rel} + \underline{v}^{trasc.}$ (è quella trovata prima)

$\underline{v}^{trasc.}$: velocità del sist. relativo rispetto a quello assoluto. $= +\underline{U}$



La velocità di trascinamento è un campo conservativo (è una costante) e quindi ammette potenziale:

$$-\underline{U} = -\underline{U}\cdot\underline{r}$$ ($-\underline{U}$ è $-\underline{v}^{trasc}$; $-\underline{U}\cdot\underline{r}$ è il potenziale di $-U$)

Il potenziale del campo di velocità relativa sarà uguale a quello di velocità assoluta meno quello di velocità di trascinamento:

$\underline{\phi}$ (potenziale vettore moto assoluto) $= -\underline{r}\cdot\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}$; ϕ (potenziale scalare moto assoluto) $= -\underline{U}\underline{r}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3$

$$\Rightarrow \phi_{rel} \text{ (potenziale scalare nel sistema relativo)} = \phi - \underline{U}\underline{r} = \underbrace{-\underline{U}\underline{r}}_{U\cdot r\cos\theta}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]$$

$$v_r^{rel} = \frac{\partial\phi^{rel}}{\partial r}$$

$$v_\theta^{rel} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi^{rel}}{\partial\theta}$$

$$v_r^{rel}(r,\theta) = -U\cos\theta\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]$$

$$v_\theta^{rel}(r,\theta) = \frac{U}{2}\operatorname{sen}\theta\left[2+\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]$$

Sono le velocità in un sistema di riferimento solidale con la sfera.

①

master COPY