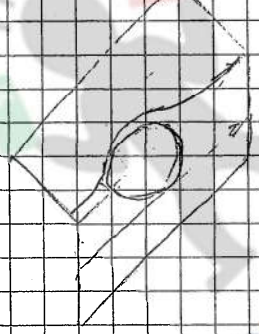
"An Introduction to Fluid-Dynamics"
G.K Batchelor

"Physico-Chemical Hydrodynamics"
V.G. Levich. F0074 CH

Linea di corrente: linea tangente al vettore velocità punto per punto; è la traiettoria di una particella.

Consideriamo un Flusso bidimensionale, ogni linea di Flusso è contenuta in un solo piano.

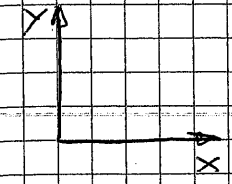
Un moto non piano bidimensionale, è quello intorno a una sfera o un corpo



master copy consulenza

Per Flussi incomprimibili si ha

$$\boxed{div\ \underline{v} = 0} \qquad v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$



nei moti piani $v_z = 0$

NOTAZIONE: $u_{(x)}, v_{(y)}, w_{(z)}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ $\Rightarrow$ dalla definizione di divergenza in moti piani

$d\Psi = -v\,dx + u\,dy$ $\Rightarrow$ Forma differenziale

$v(x,y)$ $u(x,y)$ $\Leftrightarrow$ campo di velocità

Per avere esattezza è sufficiente avere $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

Se esatta, $d\Psi$ ha una primitiva $\Psi(x,y)$ ottenuta con:

$$\begin{cases} v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ u = +\frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{cases}$$

FORMA CHIUSA $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

FORMA ESATTA $\Rightarrow$ insieme di definizione semplicemente connesso.
$\mathbb{R}^2$ privato di un punto non è semplicemente connesso quindi non è esatta

Consideriamo adesso una curva finita nel piano



Supponiamo che ci sia un flusso attraverso γ che è la traccia di un cilindro

Tale flusso ha una componente u e una v

$$F = \int_\gamma -v\,dx + \int_\gamma u\,dy$$

essendo la forma differenziale esatta F non dipende dalla forma lungo il cilindro con gli stessi estremi P_0 e P_1

Ciò significa che la portata è indipendente dalla sezione fatta su un tubo (qualunque sezione si prenda aumenta o diminuisce la velocità ma la portata resta costante

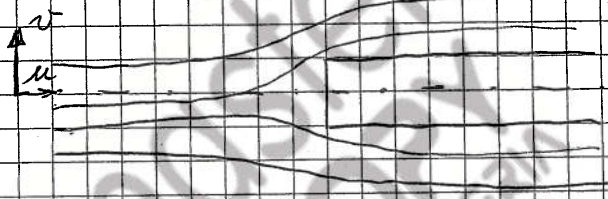
$$F = \Psi(P_1) - \Psi(P_0)$$

trovato con integrazione della forma differenziale lungo y

Ψ = Funzione corrente e lungo una linea di corrente è costante $\Psi(x, y) = c$

SISTEMA PIANO CILINDRICO (x, r)

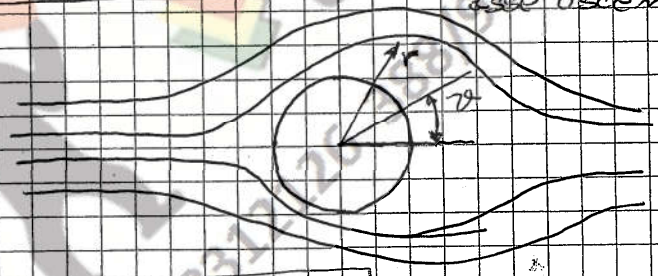
$$\begin{cases} u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ v = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$



SISTEMA PIANO POLARE (r, ϑ)

: è un cilindro con asse uscente dalla pagina

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ v_\vartheta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

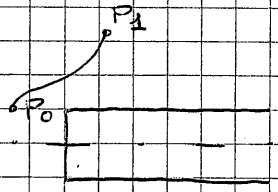


SISTEMA PIANO SFERICO (r, ϑ)

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ v_\vartheta = -\frac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

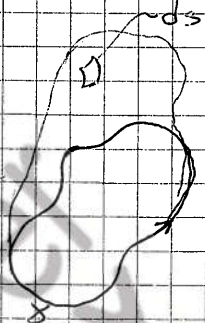
La variazione su una linea di flusso si fa così:

$$\Delta\Psi = \Psi(P_1) - \Psi(P_0) = \int_\gamma r(u\,dr + v\,dz)$$



Flusso ottenuto ruotando γ sull'asse del cilindro.

MOTI IRROTAZIONALI



$\text{rot}\,\underline{v} = \underline{\omega} = 0 \Rightarrow$ rappresenta la velocità di istantanea rotazione dell'elemento materiale.

L'integrale curvilineo di $\underline{v}$ diventa con il teorema di STOKES:

$$\oint_\gamma \underline{v}\cdot d\underline{P} = \int_S \text{rot}\,\underline{v}\cdot \underline{n}\,ds$$

Essendo $\text{rot}\,\underline{v} = 0 \;\forall\, S$ si ottiene:

$$\oint_\gamma \underline{v}\cdot d\underline{P} = \oint_\gamma u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0$$

$\forall\,\gamma$ a scelta e quindi il differenziale è esatto e dunque $\exists$ una $\Phi(x,y,z)$ detto POTENZIALE e $\underline{v}$ si dice moto potenziale

$v_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Rightarrow$ se abbiamo $\Phi(x,y,z)$ trovo il campo

MOTI SOLENOIDALI

$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ => ovvero Fluidi incomprimibili

e si ottiene:

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \nabla^2 \Phi = 0}$$ con la definizione trovata prima del campo irrotazionale

e l'equazione del Fluido INCOMPRIMIBILE, IRROTAZIONALE:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0}$$ ④ è scalare perché è un potenziale

che è scalare ④ a differenza delle Navier-Stokes

Occorrono poi delle condizioni al contorno:

$\nabla^2 \Phi = 0 \longrightarrow \Phi = \Phi(\underline{x})$

se il dominio di integrazione è semplicemente connesso allora la funzione Φ è a un solo valore ovvero è il potenziale associato al campo di velocità

Una condizione al contorno si trova prima sviluppando l'integrale ① con le proprietà di integrazione e poi uguagliandolo allo sviluppo dell'integrale ② con il teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div}(\Phi \underline{v}) dV = \int_V \Phi \operatorname{div}(\underline{v}) + \underline{v} \cdot \nabla \Phi = \int_V \underline{v}^2 dV$$

$\underline{v}$ come visto prima $= 0$

applicando il teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div}(\Phi \underline{v}) dV = \int_S (\Phi \underline{v}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{S_2} \Phi \underline{v} \cdot \hat{n}_2 \, dS_2$$

$$\longrightarrow \int \Phi v_1 \cdot \hat{n}_1 \, dS_1$$