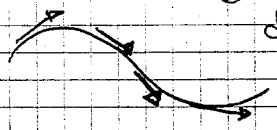
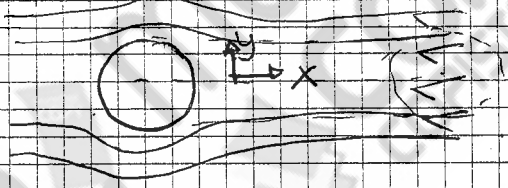
26/09/16

LINEA DI FLUSSO o DI CORRENTE → Linea punto per punto tangente al vettore velocità. È traiettoria di un elemento lagrangiano di fluido.



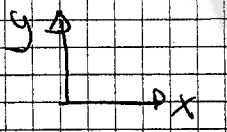
FLUSSO/MOTO BIDIMENSIONALE → Ciascuna traiettoria degli elementi lagrangiani del fluido giace su piani paralleli tutti ad uno stesso piano.

MOTO ASSIAL-SIMMETRICO → Le traiettorie giacciono su piani che hanno come asse parallele.



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Consideriamo un tubo piano e fissiamo un sistema di riferimento.



(u, v, w) → velocità nelle 3 coordinate

Consideriamo il fluido incomprimibile

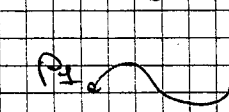
$$\operatorname{div} \underline{v} = 0$$ Bilancio di massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Consideriamo la seguente forma differenziale:

$$-v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

Vogliamo dimostrare che esiste un potenziale esatto, cioè che l'integrale lungo una curva



dipende solo dai punti iniziale e finale e non dal percorso.

Quindi: $\int -v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$

$X(x,y)$ $\quad$ $Y(x,y)$

deve essere

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y}$ → questo è vero poiché supponiamo che $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 83121...
Cell. 388 9837...

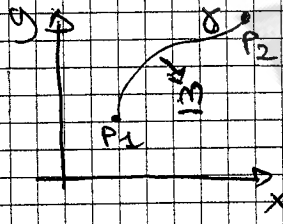
$\psi(x,y)$ → FUNZIONE DI CORRENTE (Stream function)

$$\begin{cases} -v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}$$

Componenti velocità in coordinate cartesiane per il moto piano

COPY
Tel. 050 83121 26
Cell. 388 9837745

Se conoscessimo la funzione di corrente potremmo derivare le componenti del campo di velocità.



Moto piano.
Vogliamo determinare Q_{γ} per unità di altezza → dobbiamo trovare il flusso della velocità lungo la curva γ.

$$Q = \int_{\gamma} \underline{v} \cdot \underline{n}\, dl =$$

$$= \int_{\gamma} u\,dy - v\,dx = \psi(P_2) - \psi(P_1)$$

Supponiamo che la curva γ sia una linea di flusso. Dovendo essere il vettore velocità $\underline{v}$ adesso, il flusso attraverso la curva è nullo e quindi $Q = 0$

Supponiamo che sia tubo di flusso

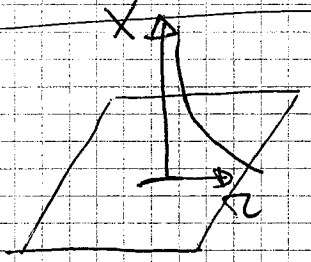
Quindi:

$$Q=0 \rightarrow \psi(P_2)-\psi(P_1)=0$$

$$\boxed{\psi(P)=\text{cost}}$$ su qualsiasi traiettoria.

Al variare della costante ottengo l'insieme delle traiettorie del fluido nel piano.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

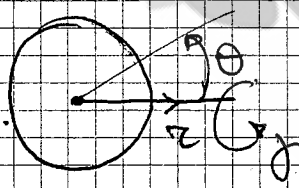


Supponiamo di avere un sistema di questo tipo → Sarebbe uno sist. di rif. cilindrico.

In questo caso le componenti della velocità sono:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ v = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Nel caso di un problema in coordinate generiche:



$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

In sistema polare, nel piano:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MOTO IRROTAZIONALE → moto nel quale $\text{rot}\,\underline{v}=0$ in ogni punto dello spazio

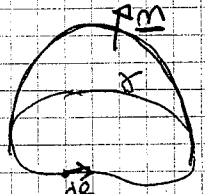
$$\left(\text{rot}\,\underline{v}=\underline{\nabla}\times\underline{v}\right)$$

↓

rappresenta la velocità di istantanea rotazione dell'elemento materiale

Teorema di Stokes

$\underline{v}=(v_x, v_y, v_z)$ dove $v_x, v_y, v_z = f(x,y,z)$



$$\Gamma_\gamma(\underline{v})=\int \underline{v}(v_x,v_y,v_z)\,d\underline{\ell} = \int \text{rot}\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,dS$$

$\Gamma_\gamma(\underline{v})$: circuitazione di $\underline{v}$ sulla curva γ

Teo. Stokes

S: qualsiasi superficie che si appoggia sulla curva γ

Nel campo irrotazionale

$$\text{rot}\,\underline{v}=0 \rightarrow \int_S \text{rot}\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,dS=0$$

Teo. Stokes

$$\Gamma_\gamma(\underline{v})=0$$ su qualsiasi curva dello spazio

↓

Condizione necessaria e sufficiente affinché

$\underline{v}=v_x dx + v_y dy + v_z dz$

sia una forma differenziale esatta nello spazio

↓

Quindi esisterà una FUNZIONE POTENZIALE Φ tale che

$$\boxed{\nabla\Phi=\underline{v}} \rightarrow \begin{cases} v_x=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \\ v_y=\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \end{cases}$$

&

Moto irrotazionale ↔ Moto potenziale

MOTO IRROTAZIONALE E FLUIDO INCOMPRIMIBILE

Sappiamo che: $\nabla \underline{v} = \frac{\delta v_i}{\delta x_i} = 0$ → dall'ipotesi fluido incomprimibile

$v_i = \frac{\delta \Phi}{\delta x_i}$ → dall'ipotesi moto potenziale

$$\text{div grad } \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_i^2} = 0$$

Per trovare il campo di velocità basta integrare con funzione potenziale.

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z^2} = 0$$ → eq. lineare omogenea di 2° ordine.

Esempio

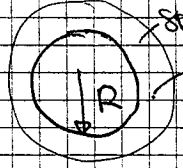
Fluido reale che impatta su una sfera



stesso elemento di fluido in due tempi diversi

È un moto rotazionale.

In alcuni casi è possibile approssimare il moto a moto irrotazionale all'esterno dello strato limite



moto rotazionale (all'interno dello strato limite)

— moto irrotazionale (all'esterno dello strato limite)