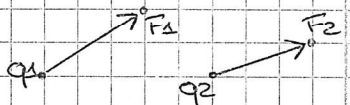
I VETTORI

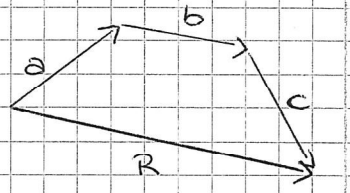
LA LUNGHEZZA DEL VETTORE POSIZIONE È LA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO "$\overline{OP}$" E LA DIREZIONE È DATA DALLA RETTA PASSANTE PER "O" E "P". IL VERSO SI INDICA CON "|P-O|". L'ESTENSIONE AFFERMA CHE SI CHIAMA VETTORE QUALUNQUE GRANDEZZA A CUI SI POSSONO ASSOCIARE UN MODULO, UNA DIREZIONE E UN VERSO.



OPERAZIONI TRA VETTORI

QUANDO FACCIAMO LE OPERAZIONI TRA VETTORI TRASCURIAMO IL PUNTO D'APPLICAZIONE DELLA SECONDA FORZA. QUINDI BISOGNA DISTINGUERE TRA VETTORI APPLICATI, CHE TENGONO CONTO DEL PUNTO D'APPLICAZIONE, E VETTORI LIBERI, CHE POSSONO ESSERE TRASLATI TRANQUILLAMENTE. QUINDI PER FARE LE OPERAZIONI TRA VETTORI BISOGNA CONSIDERARE I VETTORI LIBERI. SE HO PIÙ VETTORI POSSO APPLICARE LA REGOLA DEL POLIGONO, OVVERO METTO IN ORDINE I VETTORI UNO DOPO L'ALTRO. NELLO SPAZIO VETTORIALE TUTTI I VETTORI LIBERI CONVERGONO IN UN PUNTO.





SE ABBIAMO UN VETTORE "$\vec{F}$" PRENDO LA PARTE UNITARIA E DEFINISCO IL VERSORE COME IL VETTORE STESSO DIVISO IL SUO MODULO. IL VERSORE HA SEMPRE MODULO 1. IL VERSORE È UNA GRANDEZZA ADIMENSIONALE. ALTRE GRANDEZZE ADIMENSIONALI SONO L'ANGOLO, GLI ESPONENZIALI E I LOGARITMI.

SE PRENDIAMO DUE VETTORI "a" E "b", DEFINIAMO PRODOTTO SCALARE "a·b" CHE È UNO SCALARE, OVVERO NON HA UN VERSO E UNA DIREZIONE. IL SUO MODULO È PARI A

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\hat{a,b})$$

IL PRODOTTO SCALARE È NULLO QUANDO I VETTORI SONO ORTOGONALI FRA LORO.

UN QUALUNQUE VETTORE PUÒ ESSERE ESPRESSO IN FUNZIONE DEI VETTORI CHE COSTITUISCONO LA BASE. CONVIENE PRENDERE UNA BASE DI RIFERIMENTO ORTONORMALE, OVVERO FORMATA DA VERSORI. TRE NUMERI REALI INDIVIDUANO UN VETTORE PURCHÈ SIA FISSATA UNA BASE DI RIFERIMENTO.

IL PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI È UNA QUANTITÀ ASSOLUTA, CIOÈ NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLA BASE: LE SINGOLE COMPONENTI CAMBIANO MA CI SONO QUANTITÀ, DETTE INVARIANTI, CHE NON CAMBIANO. NELLA MATRICE "2x2" DEL PIANO SI HA UN SOLO PARAMETRO INDIPENDENTE, MENTRE NELLA MATRICE "3x3" DELLO SPAZIO CI SONO TRE PARAMETRI INDIPENDENTI. PER INDIVIDUARE UNA ROTAZIONE SPAZIALE OCCORRONO TRE PARAMETRI SCELTI OPPORTUNAMENTE.

IL PRODOTTO VETTORIALE "$a \wedge b = c$" HA IL MODULO CHE È PARI A

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \text{sen}(\hat{a,b})$$

IL VETTORE "c", PER CONVENZIONE, È USCENTE DAL PIANO (CONSIDERANDO UNA ROTAZIONE IN VERSO ANTIORARIO). IL PRODOTTO VETTORIALE È NULLO QUANDO I DUE VETTORI SONO PARALLELI TRA LORO. IL PRODOTTO VETTORIALE È ANTICOMMUTATIVO. LE TERNE SONO ORTONORMALI E ORIENTATE IN SENSO ANTIORARIO.

NEL PRODOTTO MISTO HA LA PRECEDENZA IL PRODOTTO VETTORIALE RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE. IL PRODOTTO MISTO È UGUALE AL VOLUME DEL PRISMA INDIVIDUATO DAI TRE VETTORI. I TRE VETTORI SONO COMPLANARI. SE DUE VETTORI SONO UGUALI, IL PRODOTTO MISTO È NULLO. IL DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE DIPENDE DALL'ORDINE CHE SI DÀ AI SINGOLI PRODOTTI VETTORIALI, CIOÈ

$$(a \wedge b) \wedge c = (b \cdot c)a - (a \cdot c)b$$

COORDINATE CILINDRICHE

SERVONO SEMPRE TRE PARAMETRI PER CALCOLARE (r, χ, z). SI CONSIDERA UNA FAMIGLIA DI CILINDRI MA, ESSENDO "r" COSTANTE, SI HA UN SOLO CILINDRO. IN COORDINATE POLARI SI HA NEL PIANO:

$$P - O = x_1 \cdot i_1 + x_2 \cdot i_2 + r \cdot \underline{u_r}$$

CON "$\underline{u_r}$" VERSORE ORIENTATO SECONDO IL RAGGIO. IN COORDINATE CILINDRICHE NELLO SPAZIO SI HA:

$$P - O = x_1 \cdot i_1 + x_2 \cdot i_2 + x_3 \cdot i_3 = r \cdot \underline{u_r} + z \cdot K$$

MA "$\underline{u_r}$" DIPENDE DALL'ANGOLO "φ"; LA BASE NON È FISSA MA VARIA A SECONDA DELLA POSIZIONE DEL PUNTO "P". PER UN VETTORE QUALSIASI ALLORA:

$$\underline{v} = v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 = v_r \cdot u_r(\varphi) + v_\varphi \cdot r_\varphi + v_3 \cdot K$$

VALE ANCHE

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2$$

MA ANCHE (IN COORDINATE SFERICHE):

$$P - O = \rho \cdot \underline{u_\rho}(\varphi, \Theta)$$

$$\underline{u_\rho} = \underline{u_\rho}(\varphi, \Theta)$$

QUINDI:

$$P = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow P = (r, \varphi, z) \Rightarrow P(\rho, \varphi, \Theta)$$

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\Theta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

IN COORDINATE SFERICHE QUINDI:

$$\underline{v} = v_\rho \cdot u_\rho + v_\varphi \cdot u_\varphi + v_\Theta \cdot u_\Theta$$

$$v_\rho = v \cdot u_\rho \Rightarrow v_\Theta = v \cdot u_\Theta \Rightarrow v_\varphi = v \cdot u_\varphi$$

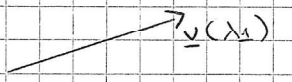
master COPY

FUNZIONI VETTORIALI

DERIVATE DI FUNZIONI VETTORIALI

SUPPONIAMO DI AVERE DUE VETTORI, DI CUI IL SECONDO È IL PRIMO PARAMETRIZZATO, OVVERO "$\underline{v}$" È IN FUNZIONE DI "λ". VOGLIAMO CHE "$\underline{v}$" SIA CONTINUA, DERIVABILE E DIFFERENZIABILE. PER TROVARE LA DERIVABILITÀ SCRIVIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\underline{v}(\lambda_2)-\underline{v}(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}$$



OVVERO

$$\frac{\underline{v}(h+\lambda_1)-\underline{v}(\lambda_1)}{h}$$

E QUINDI

$$\lim_{h\to 0}\frac{\underline{v}(h+\lambda_1)-\underline{v}(\lambda_1)}{h}=\frac{d\underline{v}(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

IL VETTORE È DERIVABILE PER "$\lambda=\lambda_1$". LA DERIVATA DEL VETTORE È UNA QUANTITÀ ASSOLUTA. NON SERVE UNA TERNA DI RIFERIMENTO: LA DERIVATA SI PUÒ FARE SOLO CON VETTORI LIBERI. VALGONO TUTTE LE REGOLE DI DERIVAZIONE VALIDE PER LE FUNZIONI SCALARI:

$$\frac{d[v(\lambda)+w(\lambda)]}{d\lambda}=v'(\lambda)+w'(\lambda)$$

$$\frac{d\,a(\lambda)v(\lambda)}{d\lambda}=a'(\lambda)v+av'(\lambda)$$

$$\frac{d[v(\lambda)\cdot w(\lambda)]}{d\lambda}=v'(\lambda)w(\lambda)+v(\lambda)w'(\lambda)$$

$$\frac{d[v\wedge w]}{d\lambda}=v'(\lambda)\wedge w+v\wedge w'(\lambda)$$

$$\frac{dv^2(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d(v\cdot v)}{d\lambda}=2v'\cdot v$$

SUPPONIAMO "$|v|=COST$", ALLORA "v" VARIA SOLO DIREZIONE MA NON IL MODULO, CIOÈ:

$$v^2(\lambda)=COST \Rightarrow \frac{dv^2(\lambda)}{d\lambda}=0=2v'(\lambda)\cdot v$$

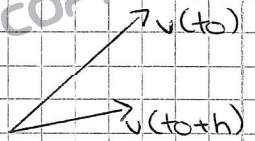
CIOÈ "v" E "v'" SONO ORTOGONALI TRA LORO. ANCHE I VERSORI HANNO MODULO COSTANTE:

$$ur(\varphi) \Rightarrow |ur|^2=1 \Rightarrow \frac{dur}{d\varphi}\perp ur$$

LA DERIVATA DI UN VERSORE È SEMPRE ORTOGONALE AL VERSORE STESSO; NON È SEMPRE DETTO CHE SIA UN VERSORE, CIOÈ CON MODULO UNITARIO.

$$t\to v(t)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}=\frac{dv(t)}{dt}\Big|_{t_0}=v'(t_0)$$



FACENDO LA DERIVATA HO CHE:

$$\frac{d[v(t)\cdot w(t)]}{dt}=\frac{dw}{dt}\cdot v+w\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[v(t)\wedge w(t)]=v'\wedge w+v\wedge w'$$

$$\frac{d}{dt}[a(t)v(t)]=a'(t)v(t)+a(t)v'(t)$$

SE SIAMO IN UNA TERNA CARTESIANA AVREMO CHE:

$$v=v_1(t)i_1+v_2(t)i_2+v_3(t)i_3=v_1\cdot u_1+v_2\cdot u_2+v_3\cdot u_3 \quad , \quad u_i=u_i(t)$$

$$\frac{dv}{dt}=v_1'\cdot i_1+v_2'\cdot i_2+v_3'\cdot i_3$$

NON SI DERIVANO I VERSORI DI BASE PERCHÈ SONO FISSI. SE LA TERNA NON È CARTESIANA, INVECE:

$$\frac{dv}{dt} = v1' \cdot u1 + v1 \cdot \frac{du1}{dt} + v2' \cdot u2 + v2 \cdot u2'(t) + v3' \cdot u3 + v3 \cdot u3'(t)$$

SE LA TERNA ORTONORMALE DIPENDE DAL PARAMETRO, VA DERIVATA ANCHE QUELLA. INOLTRE:

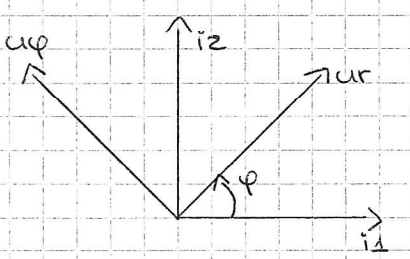
$$v = vr \cdot ur(\varphi) + v\varphi \cdot u\varphi(\varphi)$$

$$ur = \cos\varphi \cdot i1 + \sin\varphi \cdot i2 \quad \Rightarrow \quad u\varphi = -\sin\varphi \cdot i1 + \cos\varphi \cdot i2$$

$$\frac{dv}{dt} = vr' \cdot ur + vr \cdot \underbrace{\frac{ur'}{u\varphi}} + v\varphi' \cdot u\varphi + v\varphi \cdot \underbrace{\frac{u\varphi'}{-ur}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dur}{d\varphi} = u\varphi$$

LA TERNA DI UN VERSORE È IL VERSORE RUOTATO DI "90°" IN SENSO ANTIORARIO.

$$\frac{dv}{d\varphi} = (vr' - v\varphi)ur + (v\varphi' - vr)u\varphi$$



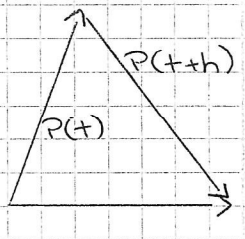
INOLTRE

$$|u(t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du(t)}{dt} \perp u(t)$$

MA GENERALMENTE

$$\left|\frac{du(t)}{dt}\right| \neq 1$$

TRA TUTTI I VETTORI ALCUNI SONO FONDAMENTALI, COME QUELLO COSTITUITO COME DIFFERENZA DI DUE PUNTI.
CONSIDERIAMO IL VETTORE "(P-O)": "P" DIPENDE DAL PARAMETRO "t" MENTRE "O" È FISSO. ORA FACCIAMO LA DERIVATA DI "(P-O)":

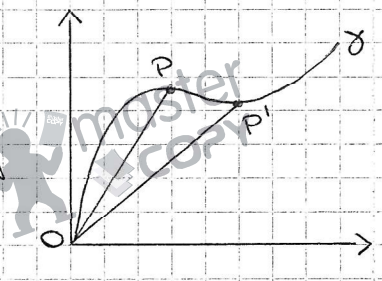


$$\frac{d[P(t)-O]}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{[P(t+h)-O]-[P(t)-O]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \frac{dP}{dt}$$

L'UGUAGLIANZA VALE PERCHÈ, SE CAMBIA "O", IL VETTORE DIFFERENZA È SEMPRE LO STESSO. IL RISULTATO FINALE È FORMALMENTE LA DERIVATA DEL PUNTO RISPETTO A "t".

UNA DIFFERENZA INFINITESIMA È L'APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE DI UNA DIFFERENZA FINITA. IMMAGINIAMO CHE IL PUNTO "O" SI MUOVA SU UNA CURVA "γ" DI EQUAZIONI PARAMETRICHE:

$$\gamma = \begin{cases} x1 = \hat{x}1(t) \\ x2 = \hat{x}2(t) \\ x3 = \hat{x}3(t) \end{cases}$$



NON TUTTE LE CURVE SI POSSONO ESPRIMERE IN FORMA CARTESIANA, PER ESEMPIO LE RETTE VERTICALI, MA TUTTE SI POSSONO ESPRIMERE IN FORMA PARAMETRICA. ALLORA FACCIAMO:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)dt = dP(t)$$

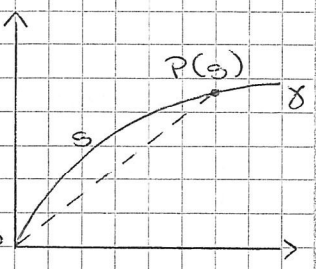
"dP/dt" È TANGENTE ALLA CURVA, ALLORA "dP" È PURE TANGENTE ALLA CURVA ED È INDIPENDENTE DALLA PARAMETRIZZAZIONE. "dP/dt" È DIRETTO COME LA TANGENTE ALLA CURVA MA IN GENERE NON HA MODULO UNITARIO. ALLORA, ESISTE UN PARAMETRO TALE CHE LA DERIVATA RISPETTO A TALE PARAMETRO DIA UN VERSORE TANGENTE (MODULO UNITARIO) ED È L'ASCISSA CURVILINEA "s". QUINDI:

$$\frac{dP(s)}{ds} = \underline{T} \quad \Rightarrow \quad |\underline{T}| = \left|\frac{dP}{ds}\right| = 1$$

QUINDI "s" È IL PARAMETRO RISPETTO AL QUALE DERIVANDO SI HA IL VERSORE TANGENTE ALLA CURVA.

CONSIDERO UNA CURVA "γ" DI EQUAZIONE:

$$\gamma = \begin{cases} x_1 = \hat{x}_1(t) \\ x_2 = \hat{x}_2(t) \\ x_3 = \hat{x}_3(t) \end{cases}$$



SE IL PUNTO "P" PUÒ PERCORRERE "γ" SI HA "$P = P(s)$". CIOÈ:

$$P - O = \hat{x}_1(\lambda) i_1 + \hat{x}_2(\lambda) i_2 + \hat{x}_3(\lambda) i_3$$

PER CAMBIARE PARAMETRO IMMAGINO CHE "$\lambda = \lambda(s)$" E CHE LA FUNZIONE SIA INVERTIBILE IN UN CERTO OPPORTUNO INTERVALLO. L'INVERTIBILITÀ DELLA FUNZIONE È NECESSARIA PER CAMBIARE PARAMETRO.

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = \hat{x}_1'(\lambda) i_1 + \hat{x}_2'(\lambda) i_2 + \hat{x}_3'(\lambda) i_3$$

$$P(s) - O = \hat{x}_1(s) i_1 + \hat{x}_2(s) i_2 + \hat{x}_3(s) i_3$$

$$\frac{d(P-O)}{ds} = \hat{x}_1'(s) i_1 + \hat{x}_2'(s) i_2 + \hat{x}_3'(s) i_3$$

$$\frac{d[P(s) - O]}{ds} = \frac{d[P(\lambda) - O]}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{ds}$$

$$dP = \underline{T} \cdot ds$$

I PARAMETRI "λ" POSSONO ESSERE QUALUNQUE DAL PUNTO DI VISTA DIMENSIONALE, MENTRE "s" E "ds" HANNO LE DIMENSIONI DI UNA LUNGHEZZA. SI DEFINISCE

$$ds^2 = dP \cdot dP = T \cdot ds \cdot T \cdot ds$$

"dP" È IL SEGMENTO E "ds" È L'ARCO DI CURVA.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$dx_1 = d\hat{x}_1(\lambda) = \hat{x}_1'(\lambda) d\lambda$$

$$dx_1 = d\hat{x}_1(s) = \hat{x}_1'(s) ds$$

$$ds^2 = \{[\hat{x}_1'(\lambda)]^2 + [\hat{x}_2'(\lambda)]^2 + [\hat{x}_3'(\lambda)]^2\} d\lambda$$

LA DERIVAZIONE È POSSIBILE SOLO SE I VETTORI SONO LIBERI: IL RISULTATO È UN VETTORE LIBERO, NON APPLICATO. NOI IMMAGINIAMO "T" TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO CONSIDERATO, MA IN REALTÀ NON È APPLICATO.

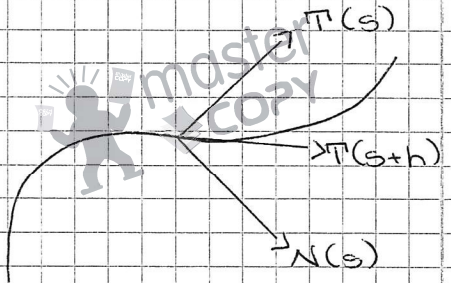
VERSORE NORMALE PRINCIPALE

DERIVIAMO "T" RISPETTO A "s": OVVIAMENTE SI OTTIENE UN VETTORE PERPENDICOLARE A "T" POICHÈ "T" HA MODULO COSTANTE. DERIVANDO ULTERIORMENTE SI OTTENGONO I VETTORI CHE HANNO DIREZIONI ORTOGONALI TRA LORO.

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(s+h) - T(s)}{h} = \frac{dT}{ds}$$

TALE DERIVATA SI TROVA SUL PIANO PERPENDICOLARE A "T" PASSANTE PER "P". TALE DERIVATA NON È IN GENERALE UN VERSORE. LO SI VEDE DALLA SEMPLICE ANALISI DIMENSIONALE, INFATTI

$$\left[\frac{dT}{ds}\right] = [L^{-1}]$$



POICHÈ IL NUMERATORE DEL RAPPORTO INCREMENTALE È ADIMENSIONALE E VIENE DIVISO PER UNA LUNGHEZZA.

CONSIDERIAMO "$N(s)$" ORTOGONALE A "$T(s)$". RIPORTIAMO "$N(s)$" PARALLELAMENTE A SE STESSO SU "$T(s+h)$" CON "$h > 0$" E "$T(s+h)$" CON "$h < 0$":