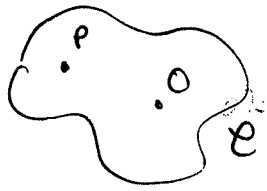
Meccanica 18.03.2013.

Corpo rigido continuo



$\mathcal{C}$ = corpo

se tale $\mathcal{C}$ nello spazio si muove, la sua velocità vale:

$$\underline{V}_P = \frac{d[\underline{P}(t) - \underline{O}]}{dt} = \frac{d\underline{P}}{dt}$$

Ω.

Corpo rigido: presi 2 punti qualsiasi la distanza di essi rimane invariata durante il moto:

$$|P-O|^2 = \text{cost} = (P-O)\cdot(P-O)$$

se faccio la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}(P-O)^2 = 2(P-O)\cdot\frac{d(P-O)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(P-O)}{dt} \perp (P-O)$$

se è $\perp$, allora:

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \underline{\Omega} \wedge (P-O), \quad \Omega = [s^{-1}]$$

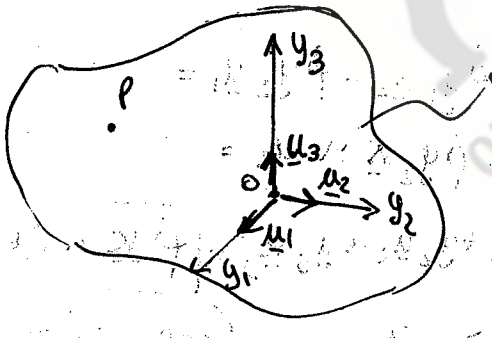
($\underline{\Omega}$: vettore orbitassio; $\frac{d(P-O)}{dt}$: non è una velocità)

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

RELAZIONE TRA P e O:

Prendiamo una terna in O e Ω.



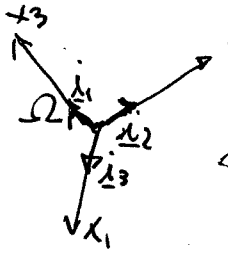
osservatore mobile, e questo è solidale alla terna fissa in Ω.

Si scriverà:

$$P(t) - \Omega = [O(t) - \Omega] + [P(t) - O(t)]$$

faccio la derivata rispetto al tempo; e ottengo:

$$\underline{V}_P = \underline{V}_O + \frac{d}{dt}[P(t) - O(t)]$$



osservatore fisso.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ versori: $P-O = y_1 \underline{u}_1 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{u}_3$, derivo:

$$\frac{d}{dt}(P-O) = \dot{y}_1 \underline{u}_1 + y_1 \dot{\underline{u}}_1 + \dot{y}_2 \underline{u}_2 + y_2 \dot{\underline{u}}_2 + \dot{y}_3 \underline{u}_3 + y_3 \dot{\underline{u}}_3$$

($\dot{y}_1 \underline{u}_1$ e $\dot{y}_3 \underline{u}_3$ vanno a 0; $y_2 \dot{\underline{u}}_2$ va a 6)

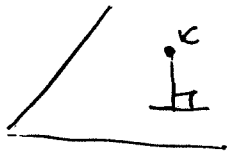
$\dot{y}_1 \underline{u}_1 = \dot{y}_2 \underline{u}_2 = \dot{y}_3 \underline{u}_3 = 0$ perché P e O rimangono invariati

obviously:

$$\frac{d(P-O)}{dt} = y_1 \dot{\underline{u}}_1 + y_2 \dot{\underline{u}}_2 + y_3 \dot{\underline{u}}_3$$

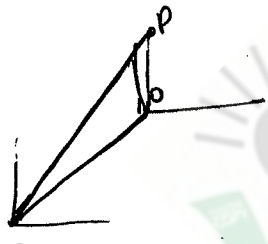
- Caso accade in $\mathbb{R}^2$ (moto piano):

La velocità sicuramente sarà parallela al piano.



x_0, t_0 piano: $\underline{u}_3 = \underline{K}$

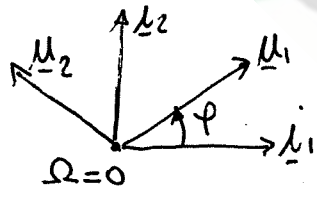
si scriverà:



$$P-O = y_1 \underline{u}_1 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{K}$$

$$\frac{d(P-O)}{dt} = y_1 \dot{\underline{u}}_1 + y_2 \dot{\underline{u}}_2$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745



$$\dot{\underline{u}}_1 = \dot{\varphi} \underline{u}_2$$

$$\dot{\underline{u}}_2 = -\dot{\varphi} \underline{u}_1$$

$$\frac{d(P-O)}{dt} = y_1 \dot{\underline{u}}_1 + y_2 \dot{\underline{u}}_2 = \dot{\varphi} y_1 \underline{u}_2 - \dot{\varphi} y_2 \underline{u}_1 =$$

$$= \dot{\varphi} \underline{K} \wedge y_1 \underline{u}_1 + \dot{\varphi} y_2 \underline{K} \wedge \underline{u}_2 =$$

$$= \dot{\varphi} \underline{K} \wedge [y_1 \underline{u}_1 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{K}] = \boxed{\dot{\varphi} \underline{K} \wedge (P-O)}$$

Se esiste una variazione angolare (velocità angolare) nel piano.
allora vale $\dot{\varphi} \underline{K} \wedge (P-O)$.

Vediamo il caso di $\mathbb{R}^3$:

Vengono in aiuto le formule di Poisson:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mu}}_1 = \underline{\omega} \wedge \underline{\mu}_1 \\ \dot{\underline{\mu}}_2 = \underline{\omega} \wedge \underline{\mu}_2 \\ \dot{\underline{\mu}}_3 = \underline{\omega} \wedge \underline{\mu}_3 \end{cases}$$ FORMULE di Poisson, sono condizioni necessarie.

$\underline{\omega} = [s^{-1}]$

ω dipende solo dal tempo:

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\mu}_1 \wedge \dot{\underline{\mu}}_1 + \underline{\mu}_2 \wedge \dot{\underline{\mu}}_2 + \underline{\mu}_3 \wedge \dot{\underline{\mu}}_3\right]$$

se sostituisco ω nelle eq. di Poisson si verificano tali equazioni.

- se ho una terna solidale e mi evolve nel tempo, come faccio a trovare le terne in un istante qualsiasi?

  se so in istante per istante, posso seguire l'andamento punto per punto.

ALLORA:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge \underbrace{\left[y_1 \underline{\mu}_1 + y_2 \underline{\mu}_2 + y_3 \underline{\mu}_3\right]}_{(P-O)}$$

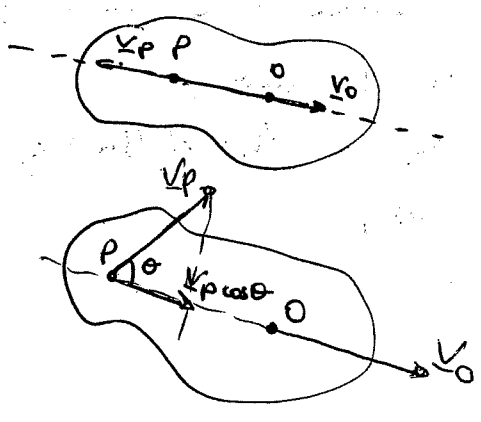
$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (P-O)} \rightarrow \text{è indipendente dalla terna scelta}$$

FORMULA FONDAMENTALE della cinematica rigida

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Esempio:

se prendo un punto:



è possibile che $\underline{v}_P = -\underline{v}_O$? NO, mi contraddice l'ipotesi fatta in precedenza (mi allontanerebbero).

$\underline{v}_P$ e $\underline{v}_O$ possono essere orientate in tal modo?

- devono essere applicate sulla stessa retta d'azione, per essa valida l'ipotesi, cioè, si deve conservare la componente di $\underline{v}_P$ lungo $(P-O)$.

Tutto ciò lo posso ricavare dalla relazione fondamentale.

Prodotto scalare di (P-O):

$$\underline{V}_P \text{ vers } (P-O) = \underline{V}_O \text{ vers } (P-O) + \underbrace{\underline{w} \wedge (P-O) \text{ vers } (P-O)}_{\text{prodotto misto} = 0}$$

$$\boxed{\underline{V}_P \text{ vers } (P-O) = \underline{V}_O \text{ vers } (P-O)} \rightsquigarrow \text{se il moto è piano}$$

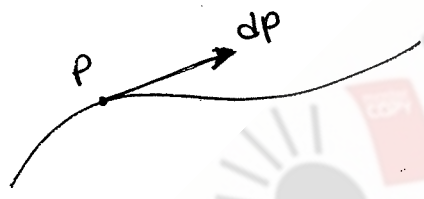
Se il moto non fosse piano!

Posso scrivere:

$$\underline{w}(t) = \dot{\varphi}(t)\,\underline{\mu}(t), \text{ integro: } \int \underline{w}(t)\,dt = \int \dot{\varphi}\,\underline{\mu}(\alpha)\,d\alpha$$

Faccio l'analogo con $\int \underline{w}(t)dt = \int \dot{\varphi}\,\underline{k}\,dt = \int d\varphi\,\underline{k}$

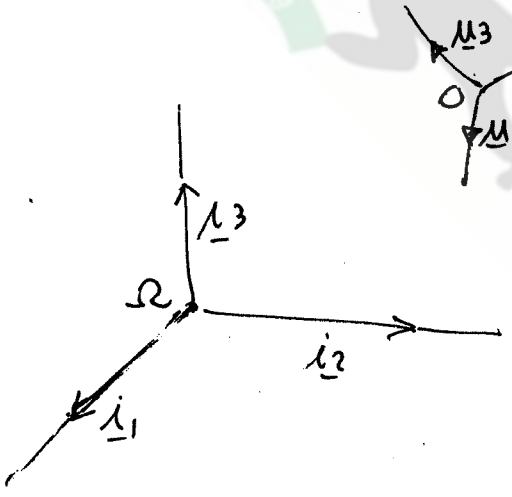
$(\underline{V}_O, \underline{w}) \rightarrow$ ATTO DI MOTO RIGIDO



$$\underline{dP} = \underline{dO} + \underline{w}\,dt \wedge (P-O)$$

$$\underline{w}\,dt = d\varphi\,\underline{k}$$

$$\boxed{\underline{w}\,dt = \delta\alpha}$$



$$\underline{\mu}_1 = \alpha_{11}\,\underline{i}_1 + \alpha_{12}\,\underline{i}_2 + \alpha_{13}\,\underline{i}_3$$

$$\underline{\mu}_2 = \alpha_{11}\,\underline{i}_1 + \alpha_{12}\,\underline{i}_2 + \alpha_{13}\,\underline{i}_3$$

$$\underline{\mu}_3 = \alpha_{11}\,\underline{i}_1 + \alpha_{12}\,\underline{i}_2 + \alpha_{13}\,\underline{i}_3$$

Posso vederla come una matrice!

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \text{dove: } \alpha_{hk} = (\underline{\mu}_k\,\underline{i}_k)$$

se fosse stato nel moto piano avrei avuto una 3×2.

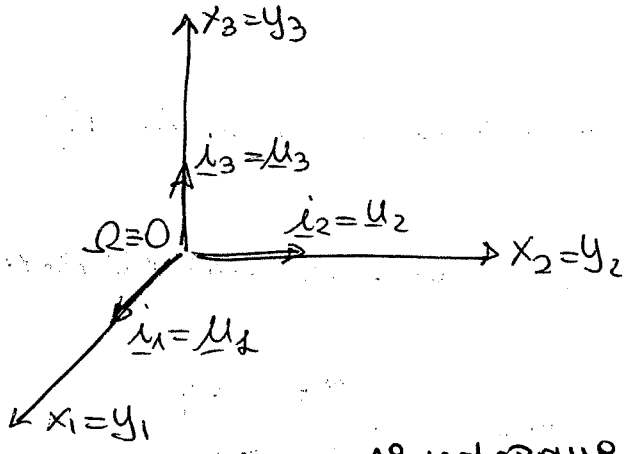
$$\mu_1^2 = \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$$

$$\underline{\mu}_1 \cdot \underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_1 \cdot \underline{\mu}_3 = \underline{\mu}_2 \cdot \underline{\mu}_3 = 0$$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1$$

master copy COPISTERIA 050/8312126 338/9837705

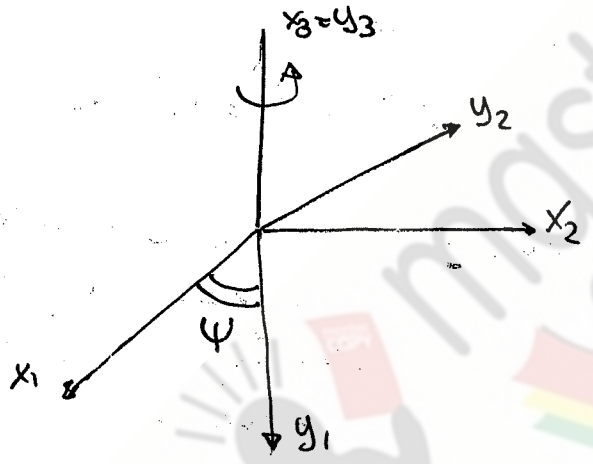
consideriamo di avere le 2 terne sovrapposte!



situazione iniziale

se eseguiamo una 1° rotazione avremo:

~~una~~ Rotazione che avviene attorno a $x_3=y_3$!



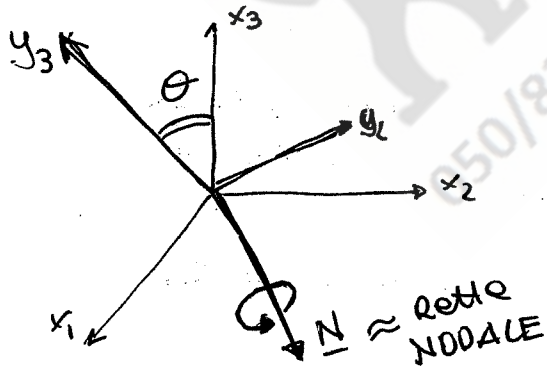
ψ detto anche:

ANGOLO DI PRECESSIONE

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

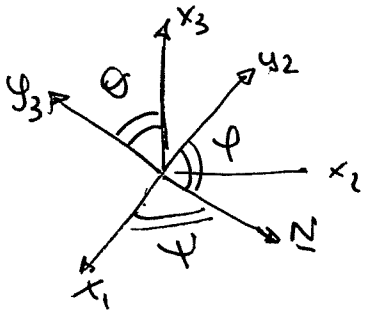
Eseguiamo una 2° rotazione: ~~Tenendo fisso~~ Ruotando lungo $y_1=\underline{N}$:



θ detto anche:

ANGOLO DI NUTAZIONE

Eseguiamo una 3° Rotazione:



φ detto anche!

ANGOLO DI ROTAZIONE PROPRIA