Multipoli



Si definisce MULTIPOLO (o n-polo) un componente circuitale con n morsetti.
Per caratterizzarlo non è più sufficiente una sola relazione tensione corrente, in quanto esistono n correnti e tensioni in ingresso.
Per i principi di Kirchoff si avranno allora:

n - 1 correnti indipendenti

e

n - 1 tensioni indipendenti.

La relazione costitutiva sarà quindi data da n-1 equazioni, rappresentabili in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix}.$$

Si definisce PORTA di un multipolo una coppia di terminali in cui la corrente che entra nel primo è uguale alla corrente che esce dall'altro.

Reti a due porte

Le RETI A DUE PORTE sono multipoli con due porte. In questo caso un segnale d'ingresso viene di solito schematizzato da un generatore con un'impedenza collegata in serie, mentre in uscita è rappresentato da un'impedenza.

Per descrivere le reti a due porte si definiscono alcuni PARAMETRI CARATTERISTICI che descrivono il funzionamento del circuito:

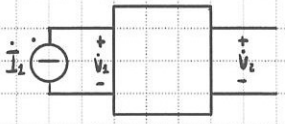
- PARAMETRI $\bar{z}$: tensioni calcolate in funzione delle correnti

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

↳ DETERMINAZIONE PARAMETRI:

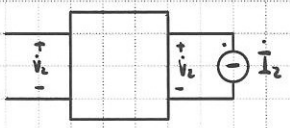
1) $\bar{z}_{11} = \left.\dfrac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$: si determinano ponendo un generatore di corrente $\dot{I}_1$ di prova sulla porta 1, lasciando la porta 2 aperta ($\dot{I}_2 = 0$); si calcola quindi prima $\dot{V}_1$ e poi $\dot{V}_2$

$\bar{z}_{21} = \left.\dfrac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$



2) $\bar{Z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$: si determinano ponendo un generatore di corrente $\dot{I}_2$ di prova sulla porta 2, lasciando la porta 1 aperta ($\dot{I}_1=0$); si calcola quindi prima $\dot{V}_1$ e poi $\dot{V}_2$

$$\bar{Z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$



PROPRIETÀ:

1) SIMMETRIA: le due porte possono essere usate indifferentemente come ingresso o uscita se:

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} \quad , \quad \bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22}$$

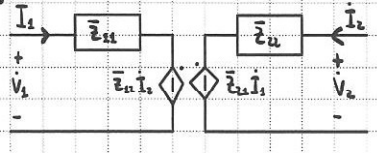
2) RECIPROCITÀ: una rete è reciproca se non ci sono pilotati e implica la simmetria se:

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21}$$

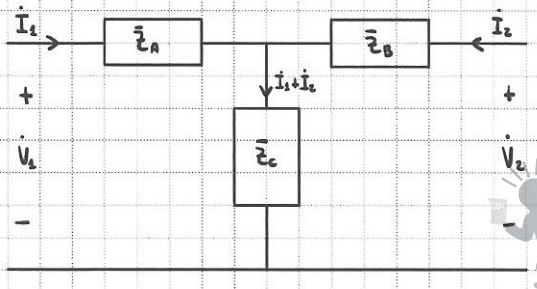
DETERMINAZIONE CIRCUITO EQUIVALENTE:

individuo un circuito opportuno in modo tale che scrivendo le equazioni di equilibrio alle porte del circuito equivalente si ottenga una matrice risolvente coincidente con quella dei parametri z (tramite M.C.M.):

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$



Nel caso di rete reciproca e matrice Z simmetrica, è possibile ottenere il circuito equivalente con solo impedenze (la matrice delle impedenze è sempre simmetrica in assenza di generatori pilotati). Si ottiene allora l'equivalente a T:

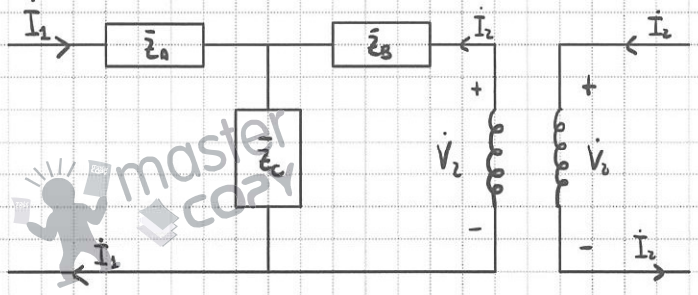


$$\dot{V}_1 = \bar{Z}_A\dot{I}_1 + (\dot{I}_1+\dot{I}_2)\bar{Z}_C = (\bar{Z}_A+\bar{Z}_C)\dot{I}_1 + \bar{Z}_C\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = \bar{Z}_B\dot{I}_2 + (\dot{I}_1+\dot{I}_2)\bar{Z}_C = (\bar{Z}_B+\bar{Z}_C)\dot{I}_2 + \bar{Z}_C\dot{I}_1$$

$$\rightsquigarrow \quad \bar{Z}_C = \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} \quad , \quad \bar{Z}_A = \bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12} \quad , \quad \bar{Z}_B = \bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{21}$$

Occorre notare che con questa rappresentazione si rischia di perdere la condizione di esistenza di una porta (corrente entrante morsetto su = corrente uscente morsetto giù). Fatto quindi la condizione di porta inserendo un TRASFORMATORE IDEALE che separa fisicamente i morsetti:

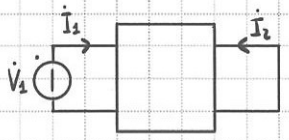


- PARAMETRI Y: correnti in funzione delle tensioni

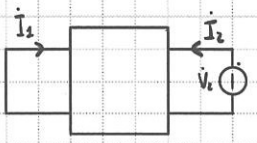
$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

↳ DETERMINAZIONE PARAMETRI:

1) $\bar{Y}_{11} = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$ $\quad \bar{Y}_{22} = \left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$: si determinano ponendo un generatore di tensione $\dot{V}_1$ di prova sulla porta 1, cortocircuitando la porta 2 ($\dot{V}_2=0$); si calcola quindi prima $\dot{I}_1$ e poi $\dot{I}_2$



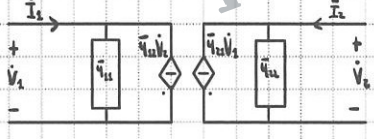
2) $\bar{Y}_{12} = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$ $\quad \bar{Y}_{22} = \left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$: si determinano ponendo un generatore di tensione $\dot{V}_2$ di prova sulla porta 2, cortocircuitando la porta 1 ($\dot{V}_1=0$); si calcola quindi prima $\dot{I}_1$ e poi $\dot{I}_2$



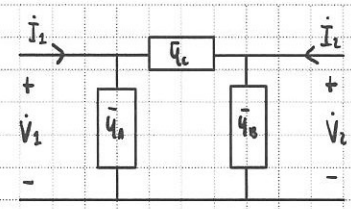
↳ DETERMINAZIONE CIRCUITO EQUIVALENTE:

individuo un circuito opportuno in modo tale che scrivendo le equazioni di equilibrio alle porte del circuito equivalente si ottenga una matrice risolvente coincidente con quella dei parametri Y (tramite M.P.N.):

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$



Se la matrice è simmetrica ($\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21}$), allora si può determinare un circuito equivalente costituito da sole impedenze. Si ottiene il circuito a π:



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (\bar{Y}_A + \bar{Y}_B)\dot{V}_1 - \bar{Y}_B \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = -\bar{Y}_B \dot{V}_1 + (\bar{Y}_B + \bar{Y}_C)\dot{V}_2 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad \bar{Y}_A = \bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{12} \qquad \bar{Y}_C = -\bar{Y}_{12} = -\bar{Y}_{21} \qquad \bar{Y}_B = \bar{Y}_{22} + \bar{Y}_{21}$$

Anche in questo caso è possibile disaccoppiare i potenziali tramite mutuo accoppiamento per rispettare la condizione di porte.

- PARAMETRI H: parametri ibridi

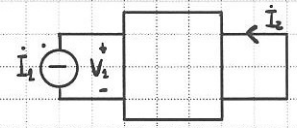
$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} \\ \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

N.B.: unità di misura: $\bar{h}_{11}$: [V/A], $\bar{h}_{22}$: [A/V], h_{12} e h_{21} adimensionali

DETERMINAZIONE PARAMETRI:

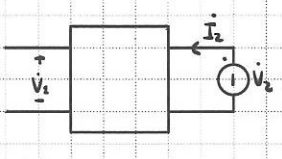
1) $\bar{h}_{11} = \left.\dfrac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$: si determinano ponendo un generatore di corrente $\dot{I}_1$ di prova sulla porta 1, cortocircuitando la porta 2 ($\dot{V}_2=0$); si calcola quindi prima $\dot{V}_1$ e poi $\dot{I}_2$

$\bar{h}_{21} = \left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$



2) $\bar{h}_{12} = \left.\dfrac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$: si determinano ponendo un generatore di tensione $\dot{V}_2$ di prova sulla porta 2, lasciando la porta 1 aperta ($\dot{I}_1=0$); si calcola quindi prima $\dot{V}_1$ e poi $\dot{I}_2$

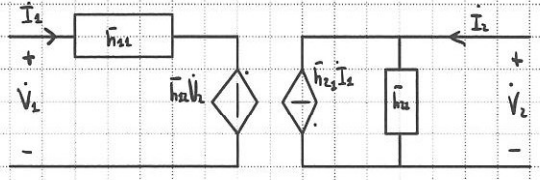
$\bar{h}_{22} = \left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$



DETERMINAZIONE CIRCUITO EQUIVALENTE:

individuo un circuito opportuno in modo tale che scrivendo le equazioni di equilibrio alle porte del circuito equivalente si ottenga una matrice risolvente coincidente con quella dei parametri h:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$



Per quanto riguarda la reciprocità, occorre ricordare la reciprocità di $\bar{Z}$ ($\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21}$); allora la condizione di reciprocità di $\bar{h}$ sarà:

$$\bar{h}_{12} = -\bar{h}_{21}$$

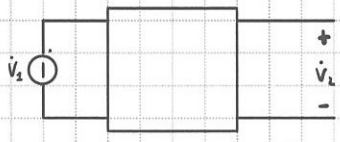
- PARAMETRI ABCD: parametri di trasmissione; grandezze in ingresso in funzione di quelle di uscita

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

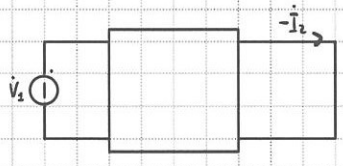
DETERMINAZIONE PARAMETRI:

non è possibile calcolare in modo diretto i parametri in quanto non è possibile inserire in un ramo un generatore di tensione ideale e imporre una corrente nulla (e viceversa). Si determinano quindi i reciproci:

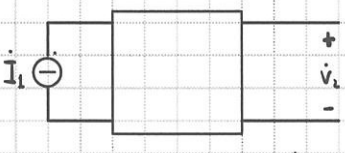
1) $\frac{1}{A} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$



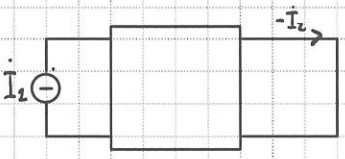
2) $\frac{1}{B} = -\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$



3) $\frac{1}{C} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$



4) $\frac{1}{D} = -\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$



DETERMINAZIONE CIRCUITO EQUIVALENTE:

si determina esprimendo $-\dot{I}_2$ in funzione delle altre grandezze

$$-\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_1}{D} - \frac{C}{D}\dot{V}_2$$

