5/03/2021

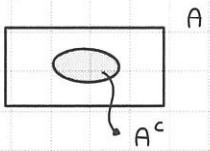
TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Il calcolo delle probabilità si occupa dello studio e della formalizzazione matematica di fenomeni 'causali' o 'esperimenti aleatori', cioè di fenomeni per i quali non è possibile predire a priori l'esito.
Il termine 'PROBABILITÀ' è usato per quantificare la possibilità che un certo evento, inteso come esito di un esperimento si verifichi.

Per arrivare alla definizione di probabilità è necessario introdurre elementi fondamentali:
- ESPERIMENTO : Insieme di condizioni sotto le quali osserviamo delle variabili
- L'USCITA DELL'ESPERIMENTO : Il risultato dell'osservazione sperimentale
- SPAZIO CAMPIONE : Insieme di tutte le possibili uscite di un esperimento, ad esempio se lanciassi un dado lo spazio campione sarebbe (1,2,3,4,5,6), se lanciassi una moneta lo spazio campione sarebbe (testa,croce), se lanciassi due monete lo spazio campione sarebbe (testa/testa, croce/croce, testa/croce, croce/testa).
- EVENTO : Sottoinsieme dello spazio campione, l'evento potrebbe essere ad esempio 'osservare 3 quando lancio un dado'. Quindi l'evento è un sottoinsieme dello spazio campione e si verifica se l'esito dell'esperimento aleatorio appartiene al sottoinsieme evento.

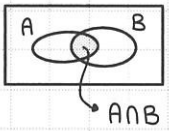
Essendo gli eventi dei sottoinsiemi dello spazio campione è possibile definire operazioni matematiche a livello insiemistico fra questi insiemi, tra cui ricordiamo:

- Complementazione (non)



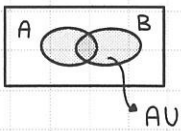
A^c = Tutto quello che non è A

- Intersezione (and)



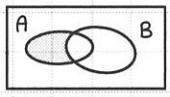
A∩B = Tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B

- Unione (or)

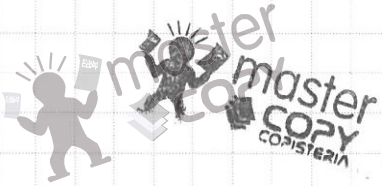


A∪B = Tutti gli elementi di A e di B

Differenza :



$A \setminus B = A \cap (B^c)$



Sia l'unione che l'intersezione godono della proprietà associativa:
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Possiamo ora definire in maniera formale la probabilità, <u>la probabilità è una funzione matematica</u> e in quanto tale ha un dominio e un codominio. La probabilità è definita su uno spazio campione che per convenzione viene chiamato Ω ed è una funzione il cui dominio è una 'sigma-algebra' su Ω e ha come codominio l'insieme chiuso [0,1] :

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

ASSIOMI

1) $P(\Omega) = 1$ la probabilità associata allo spazio campione
2) $P(\omega_i) = p_i$ Con $\omega_i \in \Omega$ e $p_i \in [0,1]$
3) Se $A_1, A_2, A_3 \ldots \in A$, sono eventi mutuamente disgiunti , allora :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

La probabilità è definita dalla terna (Ω , A, P), dove :

- Ω è un insieme
- P è una probabilità su A
- A è una 'sigma algebra' di parti di Ω

La 'sigma algebra' coincide con l'insieme di tutte le operazioni che possiamo fare sui sottoinsiemi dello spazio campione ed è un algebra chiusa sia nell'unione che nell'intersezione, quindi se consideriamo l'unione o l'intersezione di eventi appartenenti alla 'sigma algebra' rimango sempre all'interno di quest'ultima. A coincide con l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω.

ESEMPIO :

Estrazione di 6 palline da un urna:

- spazio campione (1,2,3,4,5,6)

Ad ogni evento è associata una certa probabilità, in particolare queste probabilità sono tutte uguali tra loro se si considera un urna con tutte palline uguali tra loro, ed è uguale a 'p'.

$P(\Omega) = 1$ ma $P(\Omega) = P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 6p$

quindi : $p = \frac{1}{6}$

Calcolare la probabilità di osservare (1,3,5) → Sono tra loro eventi disgiunti ; quindi :

$P = P(1)+P(3)+P(5) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

PROPRIETÀ DEGLI EVENTI

1- Mutuamente esclusivi

L'intersezione tra gli eventi è nulla, quindi se abbiamo due eventi A e B se la loro intersezione è nulla questi eventi si dicono mutuamente esclusivi o mutuamente disgiunti

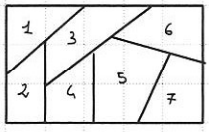
$$A \cap B = \phi$$

2- Collettivamente esaustivi

Se l'unione tra gli eventi coincide con lo spazio campione, gli eventi si dicono collettivamente esaustivi

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = \Omega$$

3- Se gli eventi sono sia mutuamente esclusivi che collettivamente esaustivi, si può dire che ogni evento costituisce una partizione unica dello spazio campione



Conseguenze degli assiomi della probabilità :

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ quando $P(A \cap B) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$A \subset B$ (A sottoevento dell'evento B) $\longrightarrow P(A) \leq P(B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0 \leq k \leq n \qquad 0! = 1$$

Il coefficiente binomiale ci da la conta di tutti i possibili sottoinsiemi di ordine k quando lo prendo da un insieme con 'n' elementi. Se abbiamo 5 palline numerate, da 1 a 5, e vogliamo sapere quali sono le combinazioni numeriche possibili prendendo 3 palline senza tener conto dell'ordine possiamo utilizzare il coeff. Binomiale.

Regole fondamentali :

1 - due eventi A e B sono **mutuamente esclusivi** o **incompatibili** se : $P[A \cap B] = 0$

2 - se due eventi sono incompatibili la probabilità che si verifichi o l'uno o l'altro è data da: $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

3 - due eventi sono **indipendenti** se il verificarsi di uno non influenza il verificarsi dell'altro

4 - se due eventi sono indipendenti allora : $P[A \cap B] = P[A] * P[B]$

Differenza tra incompatibili e indipendenti :

- lancio 1 dado e voglio sapere la probabilità che escano i numeri 1 o 6, in questo caso gli eventi sono incompatibili.
- lancio 2 dadi e voglio sapere la probabilità che escano 1 e 6, in questo caso gli eventi sono indipendenti, perchè il lancio del primo dado non influenza il lancio del secondo.

Esempio : Lancio un dado. Qual è la probabilità che esca un numero inferiore o uguale a 2 oppure un numero pari?

EVENTO 1 $A = \{1,2\}$ $P[A] = 1/3$

EVENTO 2 $B = \{2,4,6\}$ $P[B] = 1/2$

INTERSEZIONE $A \cap B = \{2\}$ $P[A \cap B] = 1/6$

UNIONE $A \cup B \longrightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = \frac{2}{3}$ REGOLA DELLA SOMMA

Esempio : Lancio due dadi. Qual è la probabilità che esca il numero 2 da du dado e il numero 3 da un altro (eventi indipendenti)

EVENTO 1 $A = \{2\}$ $P[A] = 1/6$

EVENTO 2 $B = \{3\}$ $P[B] = 1/6$

INTERSEZIONE $A \cap B \longrightarrow P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = \frac{1}{36}$ REGOLA DEL PRODOTTO

Esempio : Qual è la probabilità che lanciando un dado per due volte esca almeno una volta il numero 6

1 - lancio il primo dado : $P[6] = \frac{1}{6}$ $P[\text{not } 6] = \frac{5}{6}$

2 - lancio il secondo dado : $P[6] = \frac{1}{6}$ $P[\text{not } 6] = \frac{5}{6}$

Sono 2 eventi indipendenti, quindi l'intersezione è data dal prodotto :

$P[6,6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $P[6, \text{not } 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ $P[\text{not } 6, 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P[\text{not } 6, \text{not } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

Quindi a questo punto la probabilità che esca almeno un 6 dal lancio dei due dadi è data dalla somma delle probabilità degli eventi favorevoli

$$P[\text{almeno un } 6] = P[6,6] + P[6, \text{not } 6] + P[\text{not } 6, 6] = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

C'è un metodo furbo per poter ottenere lo stesso risultato in maniera più rapida, basta semplicemente lavorare con il complementare

$$P[\text{not } 6, \text{not } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} \longrightarrow P[\text{almeno un } 6] = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

DEFINIZIONE PROBABILITÀ CONDIZIONATA

La probabilità associata all'evento A condizionata all'evento B, ovvero al fatto che si osservi l'evento B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se due eventi **sono indipendenti** la probabilità che si verifichi l'uno e l'altro è:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Se due eventi non sono indipendenti la probabilità che si verifichi l'uno e l'altro è:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

↳ PROBABILITÀ DI B CONDIZIONATA AD A
(Probabilità di B dato il verificarsi di A)

Esempio : Supponiamo di andare al casinò e di giocare 3 numeri alla roulette 3,13 e 22, qual è la probabilità di vincere ? I numeri sono 37 e gli eventi considerati sono mutuamente esclusivi, quindi :

$$B = \{3, 13, 22\} \qquad P[B] = \frac{1}{37} + \frac{1}{37} + \frac{1}{37} = \frac{3}{37}$$

Si scopre a questo punto che la roulette è truccata e che possono uscire solo numeri dispari, quindi come cambia la probabilità ? In questo caso dobbiamo considerare la probabilità di B condizionata al fatto che possono uscire solo numeri dispari. L'insieme dei numeri dispari lo chiamiamo A = (1,3,5,7,9,11.....,35)

$$A \cap B = \{3, 13\}$$

$$P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{9}$$

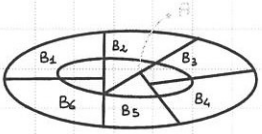
master COPY

master COPY COMISTERIA

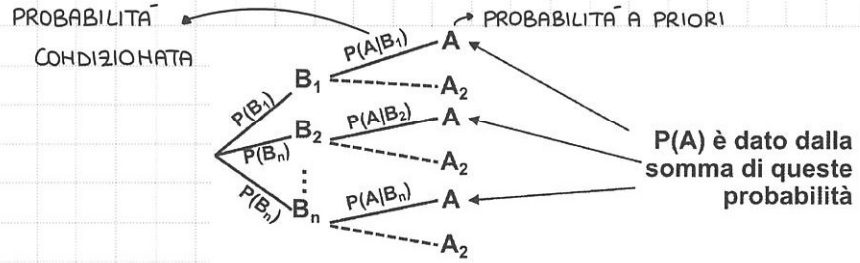
TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

Prendiamo una serie di eventi B1, B2.....Bn; questi eventi rappresentano una partizione dello spazio campione in quanto sono mutuamente esclusivi e collettivamente esaustivi. Consideriamo ora un altro evento A che avrà un intersezione non nulla con gli eventi B. La probabilità legata all'evento A sappiamo essere uguale a :

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(B_i) P(A|B_i)$$

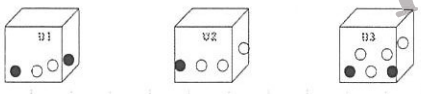


Una rappresentazione semplice e potente di questo teorema è la rappresentazione ad albero.



Esempio 1 : Supponiamo di avere 3 urne, ognuna delle quali contiene palline bianche e nere in numero variabile. Scegliamo un urna a caso e calcoliamo la probabilità di estrarre una pallina bianca.

master COPY



Questo esperimento può essere suddiviso in due sotto esperimenti, il primo è quello di scegliere l'urna il secondo quello di pescare la pallina. Immaginando che la scelta dell'urna sia equiprobabile abbiamo :

