TEORIA DELLE PROBABILITÀ

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PROBABILITÀ NEL CASO DI EVENTI EQUIPROBABILI

Dato un esperimento e un evento A

$$Pr\{A\} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}}_{\text{LIMITE DELLA FREQUENZA RELATIVA DELL'EVENTO CON } n\to\infty}$$

n = n° prove totali

n_A = n° volte in cui si è verificato A

⚠ NON È LA DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ

DEFINIZIONI

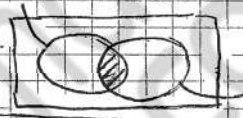
- ESPERIMENTO = insieme di condizioni sulle quali viene osservata una certa variabile
- ESITO DELL'ESP. = risultato dell'osservazione (SAMPLE POINT)
- SPAZIO CAMPIONARIO = insieme di tutti i possibili esiti (SAMPLE SPACE) (S)
- EVENTO = insieme di esiti

OPERAZIONI CON GLI EVENTI (dato un evento A e un secondo evento B)

- COMPLEMENTARE A^c



- INTERSEZIONE $A \cap B$



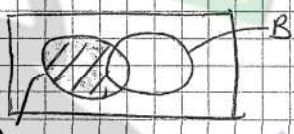
PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DI $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

- UNIONE $A \cup B$



PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DI $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

- MINUS $A \setminus B$



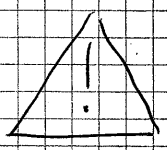
$[A \cap (B^c)]$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DEFINIZIONE FORMALE DI PROBABILITÀ (Quella x il compito)

PROBABILITÀ: terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dove:

- Ω È UN INSIEME
- $\mathcal{A}$ È σ-ALGEBRA DI PARTI DI Ω (si legge "Sigma algebra")
- P È UNA PROBABILITÀ SU $\mathcal{A}$



$\mathcal{A}$ una FAMIGLIA comune in V DI PARTI di Ω ovvero L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI SOTTOINSIEMI DI Ω

Una σ-ALGEBRA comune in una SERIE V DI OPERAZIONI sui SOTTOINSIEMI e in particolare se $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{A}$ (elementi di $\mathcal{A}$) allora:

$\bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (CHIUSURA RISPETTO ALLE OPERAZIONI $\cup$ e $\cap$)

La PROBABILITÀ è una FUNZIONE $P: \mathcal{A} \to [0;1]$ tale che

- $P(\Omega) = 1$
- dato $\{A_n\}_n$ successione di elementi $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti allora $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Una MISURA DI PROBABILITÀ (o semplicemente PROBABILITÀ) P in uno SPAZIO CAMPIONARIO Ω è una funzione:

$$P: \mathcal{A} \to [0,1]$$

che soddisfa:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\omega_i) = p_i$
- se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ sono MUTUAMENTE DISGIUNTI A DUE A DUE $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$

PROPRIETÀ DEGLI EVENTI

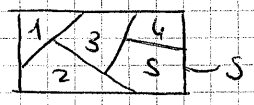
- MUTUAMENTE DISGIUNTI/ESCLUSIVI = INTERSEZIONE tra gli elementi è NULLA

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j$$

- COLLETTIVAMENTE ESAUSTIVI = l'UNIONE dei due o più eventi DÀ LO SPAZIO

$$A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = S$$

Se gli eventi presi in considerazione SONO MUTUAMENTE DISGIUNTI tra loro e COLLETTIVAMENTE ESAUSTIVI formano UNA PARTIZIONE DELLO SPAZIO S



$1, 2, 3, 4, 5 = A_i \quad i = 1 \ldots 5 \quad \bigcup_{i=1}^{5} A_i = S$

PROBABILITÀ DI UN EVENTO

- FREQUENZA RELATIVA $f_E = \frac{n_E}{n}$
  - $0 \leq f_E \leq 1$
  - $f_S = 1$
  - $P(A \cup B) = f_A + f_B$ se A e B MUTUAMENTE DISGIUNTI

- ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(S) = 1$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B MUTUAMENTE DISGIUNTI
- CONSEGUENZE DAGLI ASSIOMI
  - $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

NB $A \subset B \longrightarrow P(A) \leq P(B)$

COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{con } 0 \leq k \leq n$$

NB $0! = 1$

Proprietà Simmetrica:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

UNIONE DI 2 EVENTI O PIÙ

NB $AB = A \cap B$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(FG) - P(EG) + P(EFG)$
- In generale

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n)$$

$\sum_{i_1 < i_2}$: preso $i_1 = 1, \dots, n$, i_2 deve essere preso $> i_1$

$\sum$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_r$

REGOLE FONDAMENTALI DELLA PROBABILITÀ

- Eventi MUTUAMENTE ESCLUSIVI o INCOMPATIBILI:
  $P(A \cap B) = \emptyset$ infatti $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \emptyset$
- Eventi INDIPENDENTI se il verificarsi di UNO NON INFLUENZA IL VERIFICARSI DELL'ALTRO e quindi:
  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ex dado

- prob 3 o > 3 → INCOMPATIBILI
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- prob ≤ 2 o PARI → NON INCOMP
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ (2)

ex 2 dadi

- 2 da uno e 3 l'altro → INDIPENDENTI
  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
  (esce 2, esce 3)
- lancio un dado x2 esce 6 almeno 1
  $P[6] = \frac{1}{6}$ $P[\text{not } 6] = \frac{5}{6}$
  $P[6 \text{ e not } 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$
  $P[6 \text{ e } 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
  $P[\text{not } 6 \text{ e } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$
  $P[\text{not } 6 \text{ e not } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$
  → $P[\text{almeno uno } 6] = \frac{11}{36}$
  → $P[\text{almeno } 6] = 1 - P[\text{not } 6 \text{ not } 6] = \frac{11}{36}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilità che ACCADA A DATO IL FATTO CHE B SIA ACCADUTO

ex 3, 13, 22 alla roulette su 37 numeri → INCOMPATIBILI

Prob. uscita $P[3 \text{ o } 13 \text{ o } 22] = P(3) + P(13) + P(22) = \frac{1}{37} + \frac{1}{37} + \frac{1}{37} = \frac{3}{37}$

la ROULETTE è truccata → fa uscire solo dispari →
→ dato che esce solo dispari → probabilità di vincita:

$$P(3|\text{dispari}) = \frac{P(3 \cap \text{dispari})}{P(\text{disp})} = \frac{1/37}{18/37} = \frac{1}{18}$$

$$P(13|\text{dispari}) = \frac{P(13 \cap d)}{P(d)} = \frac{\frac{1}{37}}{\frac{18}{37}} = \frac{1}{18}$$

$$P(22|\text{dispari}) = \frac{P(22 \cap d)}{P(d)} = \frac{\emptyset}{\frac{18}{37}}$$

$$P(\text{VINCITA}) = P(3|d) + P(13|d) + P(22|d) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{P((3 \cup 13 \cup 22) \cap d)}{P(d)} = \frac{\frac{2}{37}}{\frac{18}{37}} = \frac{1}{9}$$

NB Gli eventi INDIPENDENTI non si influenzano a vicenda

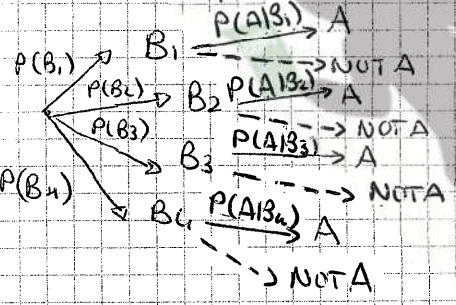
$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\text{INDIPEND}}{=} P(A) \quad \text{analogamente } P(B|A) \overset{\text{INDIPENDENTI}}{=} P(B)$$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

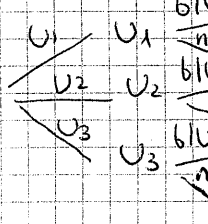
Dati $\{B_1, B_2, \dots B_n\}$ PARTIZIONE DI UNO SPAZIO (ovvero sono MUTUAMENTE DISGIUNTI E COLLETTIVAMENTE ESAUSTIVI) e A un altro evento dello spazio. Allora:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)$$



ex 3 URNE: ne scelgo una a caso → pallina bianca?

U_1: ○ ○ ● ● → $P(b|U_1) = 1/2$
U_2: ○ ○ ○ ● → $P(b|U_2) = 3/4$
U_3: ○ ○ ○ ○ ● ● → $P(b|U_3) = 2/3$

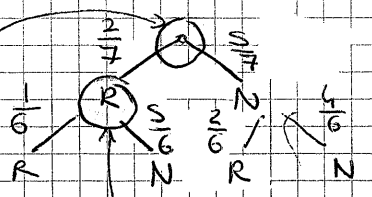


$$P(b) = P(U_1)P(b|U_1) + P(U_2)P(b|U_2) + P(U_3)P(b|U_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{6+9+8}{36} = \frac{23}{36}$$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

ex Sacch nero: 2R 5N →



$P(r) = \frac{2}{7}$ $P(n) = \frac{5}{7}$

- SE NON SO COSA HO PESCATO ALLA PRIMA SONO QUI

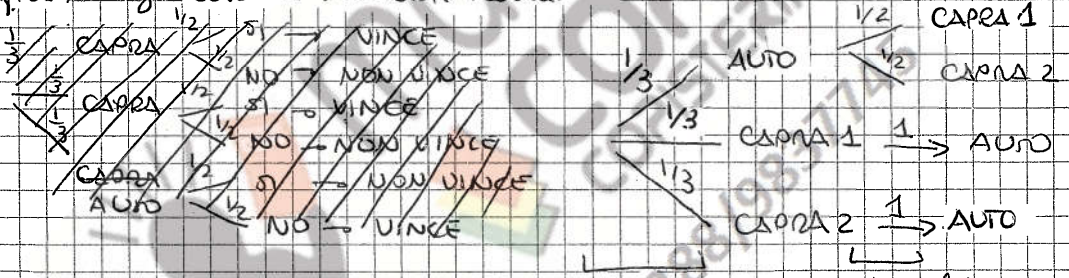
$$P(\text{vincita}) = P(n)P(r_1|n) + P(r)P(n_1|r) =$$
$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6_3} + \frac{2}{7}\frac{5}{6_3} = \frac{10}{21}$$

- Se SO COSA HO PESCATO ALLA PRIMA (ROSSO) SONO QUI

$$P(\text{vincita}) = P(n_1|r) = \frac{5}{6}$$

ex Problema di MONTY HALL (quella non scelta)

3 porte: 2 capre 1 auto → concorrente sceglie una → si apre una V capra → gli conviene cambiare scelta.



Quindi

P(VINCITA CAMBIANDO) =

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$ teorema di Bayes

poiché essendo $P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$ →

→ si ottiene il teorema

Per il teorema della probabilità TOTALE HO CHE:

$P(B) = P(A\cap B) + P(A^c \cap B)$

applicando la def di probabilità condizionata:

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$

Quindi:

$$P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745