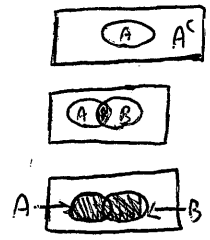
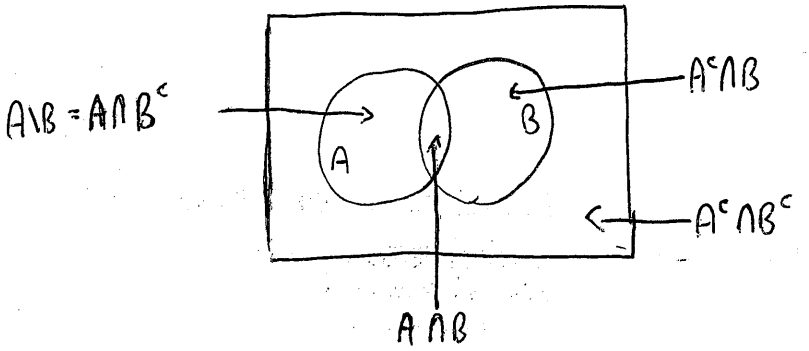
TEORIA della PROBABILITÀ

- **DEFINIZIONI:**
  - ESPERIMENTO: condizioni sotto le quali una variabile è osservata
  - USCITA (di un esperimento): risultato di un'osservazione (CAMPIONE)
    ESITO
  - SPAZIO CAMPIONARIO S: insieme di tutte le possibili "uscite", ovvero di tutti i campioni dell'esperimento
  - EVENTO: insieme di campioni (sottoinsieme di S)

  - OPERAZIONI con EVENTI:
    - COMPLEMENTARE: A^c — (evento che si verifica se non si verifica A) elementi di S ma non di A
    - INTERSEZIONE: $A \cap B$ — (evento che si verifica se si verificano sia A che B) elementi contenuti in entrambi gli insiemi
    - UNIONE: $A \cup B$ — (evento che si verifica se si verifica A o B o entrambi) elementi contenuti almeno in uno dei due insiemi





N.B.: "A meno B": elementi di A ma non di B $\rightsquigarrow A \setminus B$

- proprietà di associatività:
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

- **PROPRIETÀ degli EVENTI:**
  - MUTUAMENTE ESCLUSIVI (o DISGIUNTI): intersezione tra gli eventi nulla ($A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$)
  - COLLETTIVAMENTE ESAUSTIVI: l'unione degli eventi dà lo spazio campione ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S_n$)
  - se n eventi $A_1, \dots, A_n$ sono sia mutuamente esclusivi che collettivamente esaustivi, essi formano una PARTIZIONE dello spazio campione S_n

PROPRIETÀ	UNIONE	INTERSEZIONE
• commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
• associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
• distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
• di inclusione	$A \subseteq B \iff A \cup B = B$	$A \subseteq B \iff A \cap B = A$
	$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$
	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
	$A \cup A^c = \Omega$	$A \cap A^c = \emptyset$
• Leggi di De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

• PROBABILITÀ ⇒ approccio FREQUENTISTA

$f_E = \frac{n_E}{n}$ ⇝ 1) $0 \leq f_E \leq 1$

2) $f_S = 1$

3) $f_{(A \cup B)} = f_A + f_B$ se A e B sono mutuamente esclusivi

• ASSIOMI PROBABILITÀ

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (se A e B sono mutuamente esclusivi)

⇒ conseguenze:

• PROBABILITÀ del COMPLEMENTARE: $P(A^c) = 1 - P(A)$

• PROPRIETÀ GENERICA su unione e intersezione di eventi qualsiasi: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

si può anche scrivere $P(AB)$

• COEFFICIENTE BINOMIALE: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ con $0 \leq K \leq n$

└ indica il numero di tutte le possibili combinazioni di ordine K per n eventi (dove l'ordine non interessa)

N.B.: • $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ PROPRIETÀ di SIMMETRIA

• $0! = 1$

• PROPRIETÀ SOMMA: si ricorda che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

inoltre $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG)$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \ldots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} P(E_{i_1} \ldots E_{i_r})}$$

- REGOLE FONDAMENTALI:

1) due eventi sono mutuamente esclusivi (o INCOMPATIBILI) se: $P[A \cap B] = P[A \in B] = 0$

2) se due eventi A e B sono INCOMPATIBILI, la probabilità che si verifichi O uno O l'altro evento è:

$P[A \cup B] = P[A \circ B] = P[A] + P[B]$ (3° ASSIOMA)

3) due eventi A e B sono INDIPENDENTI se il verificarsi di uno NON influenza il verificarsi dell'altro

4) se due eventi A e B sono INDIPENDENTI, la probabilità che si verifichi l'uno E l'altro è:

$P[A \cap B] = P[A \in B] = P[A] \cdot P[B]$

N.B.: se due eventi sono indipendenti: $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$

↳ GENERALIZZAZIONE SOMMA: se due eventi A e B NON sono incompatibili ($P(A \cap B) \neq 0$), allora:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

(O: $P[A \cup B]$; E: $P[A \cap B]$)

- PROPRIETÀ CONDIZIONATA: probabilità di un evento A condizionata al verificarsi dell'evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

↳ GENERALIZZAZIONE PRODOTTO: se due eventi A e B NON sono indipendenti, la probabilità che si verifichi l'uno E l'altro è:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B|A] = P[B] \cdot P[A|B]$$

(E: $P[A \cap B]$)

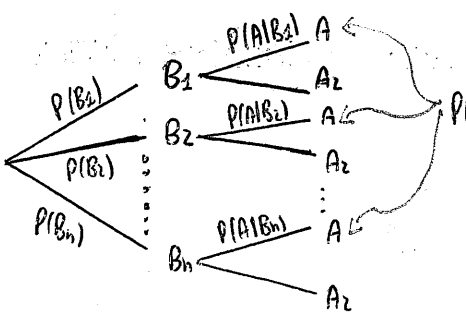
dove $P[B|A]$: prob. di B dato il verificarsi di A (prob. B assume un nuovo valore se si verifica A)

- TEOREMA della PROBABILITÀ TOTALE

caso semplice: partizione di S in $B \cup B^c$ $\rightsquigarrow$ $P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)$ ($[1-P(B)]$)
$[A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)]$

caso generale: partizione di S in n eventi $\{B_1, \dots, B_n\}$ mutuamente esclusivi e collettivamente esaustivi $\rightsquigarrow$ $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$

↳ RAPPRESENTAZIONE ad ALBERO:



• TEOREMA di BAYES

- enunciato classico ⇝ dato che: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B|A]$; $P[A \cap B] = P[B]\, P[A|B]$ $\Rightarrow$ $P[A|B] = \frac{P[B|A]\, P[A]}{P[B]}$

- enunciato da prob. tot. ⇝ dato che: $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)\, P(B|A^c)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P[A|B] = P[A] \frac{P[B|A]}{P[A]\, P[B|A] + P[A^c]\, P[B|A^c]}$$

↳ processo di formazione della conoscenza a partire dall'esperienza (conoscenza a posteriori):

$B = \{\text{osservazioni}\}$ $A = \{\text{ipotesi}\}$

⇝ $P[A|B]$: conoscenza A POSTERIORI riguardo la verità di una ipotesi date le osservazioni

⇝ $P[B|A]$: osservazioni che ottengo sotto ipotesi

⇝ $P[A]$: conoscenza A PRIORI riguardo la verità di una ipotesi prima di aver analizzato le osservazioni

⇝ $P[B]$: costante di normalizzazione non dipendente dalle ipotesi

• CAMPIONAMENTO di una POPOLAZIONE STATISTICA

1) CAMPIONAMENTO SENZA RIPETIZIONE e INTERESSA L'ORDINE:
se prendo un elemento non lo riconsidero e mi interessa l'ordine in cui li prendo (ordini diversi danno insiemi diversi)

↳ n° di DISPOSIZIONI semplici di n ELEMENTI ESTRATTI da M = $\frac{M!}{(M-n)!}$

2) CAMPIONAMENTO SENZA RIPETIZIONE e NON INTERESSA L'ORDINE:
tutte le possibili combinazioni di n elementi da un insieme di M elementi

↳ $y = \binom{M}{n} = \frac{M!}{n!\,(M-n)!}$

3) CAMPIONAMENTO CON RIPETIZIONE e INTERESSA L'ORDINE:
si riconsidera n volte l'elemento estratto; insieme di tutte le disposizioni con ripetizione di M elementi di ordine n

↳ M^n

master COPY

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE e CONTINUE

- una VARIABILE ALEATORIA X è una variabile i cui esiti/valori sono regolati dalle "REGOLE del CASO", ovvero non si riesce ad associare una funzione matematica che descrivi l'evento in modo deterministico, bensì verrà trattata in termini probabilistici

  ↳ APPROCCIO FREQUENTISTA: ripetendo un esperimento più e più volte, la probabilità descrive quanto "frequentemente" i diversi esiti si verificano

  ↳ N.B.: POPOLAZIONE = VARIABILE ALEATORIA
  CAMPIONE = "OSSERVAZIONE" VARIABILE ALEATORIA (sottoinsieme)

- si indica con REALIZZAZIONE della VARIABILE ALEATORIA x un valore specifico che la variabile può assumere in seguito ad un esperimento

  ↳ il campione è quindi un insieme di realizzazioni di variabili aleatorie

- le variabili aleatorie si distinguono in:

  ↳ DISCRETE: valori discreti, finiti ↳ CONTINUE: valori continui e infiniti

master COPY

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

- una variabile aleatoria è completamente descritta dalla FUNZIONE DENSITÀ di PROBABILITÀ ad essa associata

  ↳ $f(x)$ si può definire una funzione densità di probabilità $\Leftrightarrow$ $f(x) \geq 0$ (non negativa e l'integrale su tutto lo spazio è uguale a 1)
  $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

  ↳ Se si ha una funzione densità di probabilità associata ad una variabile aleatoria, cioè:
  $$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx = \int 1_B(x)\, f(x)\,dx$$
  allora si può assumere che l'integrale indefinito di $f(x)$ è uguale a 1 e $f(x) \geq 0$

⇓

~ PROBABILITÀ ASSOCIATA alla FUNZIONE DENSITÀ di PROBABILITÀ: la probabilità che la variabile X assuma valori $x \in [a,b]$ è data dall'area sotto f tra a e b
$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

N.B.: la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori specifici è uguale a 0

~ FUNZIONE DISTRIBUZIONE CUMULATIVA: $F(a) = F_X(a) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

N.B.: $f(x) = \frac{dF}{dx}$

