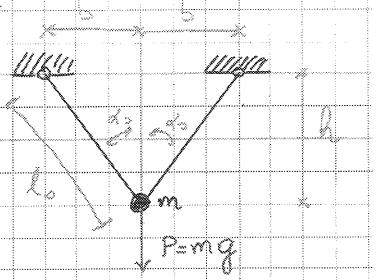
2 ore / 27/05/17

L'applicazione di P provoca una deformazione dei fili.
Indico con α_0 l'angolo con la verticale nel caso non deformato



L'angolo α di inclinazione delle forze nel caso deformato è incognito, e questo genera una complicazione nei calcoli, ancora però risolvibili.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9937745

Interviene l'IPOTESI PICCOLI SPOSTAMENTI:
ai fini della scrittura dell'eq. di equilibrio statico, poniamo considerare spostamenti così piccoli da avere come configurazione quella non deformata
Quindi l'equilibrio statico si impone nella config. non deformata
$\Rightarrow \alpha \simeq \alpha_0$

Allora ottengo un sistema di 2 eq in 2 incognite (T_1 e T_2) e risolvibile (ipotizzando α_0 noto)

$$\begin{cases} -T_1 \sin\alpha_0 + T_2 \sin\alpha_0 = 0 \\ T_1 \cos\alpha_0 + T_2 \cos\alpha_0 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = T_2 \\ T_1 = \dfrac{P}{2\cos\alpha_0} \end{cases}$$

perché bastano 1 eq dell'equil. statico per risolverlo

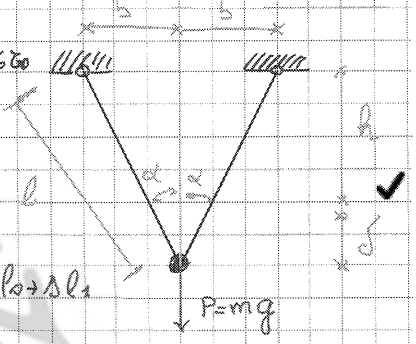
Il problema si dice STATICAMENTE DETERMINATO. Possiamo allora trattare come divia corpo statico e cinematico.

Considero le equaz. di LEGAME COSTITUTIVO:

$$\begin{cases} T_1 = EA\,\varepsilon_1 \\ T_2 = E\,A\,\varepsilon_2 \end{cases} \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{T_1}{EA} = \frac{P}{2EA\cos\alpha_0}$$

ipotizzo uguali i due fili → anche le deformazioni sono uguali.

Posso allora calcolare l, cioè la lunghezza finale del filo, e l'abbassamento verticale della massa m (δ)

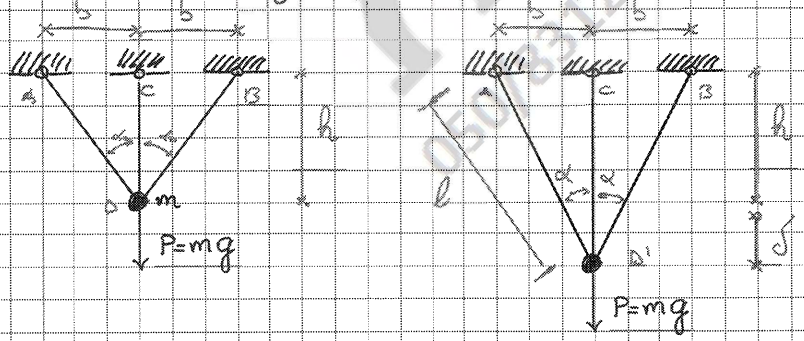


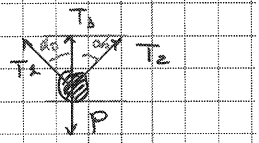
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_0} \rightarrow \Delta l_1 = \varepsilon_1 l_0 = \frac{P l_0}{2EA\cos\alpha_0} \rightarrow l = l_0 + \Delta l_1$$

Dai triangoli rettangoli ho $l^2 = b^2 + (h+\delta)^2$

Poniamo quindi, grazie ai piccoli spostamenti, occuparci prima del caso non deformato e solo successivamente quello deformato.

Ci sono però situazioni in cui questa ipotesi non vale.
Ad esempio, aggiungo un terzo filo al sistema





Situaz. non deformata — situaz. deformata — schema delle forze

Scrivendo l'eq. di equil. statico, ho 2 eq e 3 inc.
↳ T_1, T_2, T_3

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\begin{cases} -T_1 \sin\alpha_0 + T_2 \sin\alpha_0 = 0 \\ +T_1 \cos\alpha_0 + T_2 \cos\alpha_0 + T_3 - P = 0 \end{cases}$$

→ non bastano l'eq. di equilibrio alla traslazione per risolvere il problema

Allora il nostro problema è STATICAMENTE NON DETERMINATO.

Possiamo provare a studiare statica e cinematica insieme.

Iniziamo dalle equazioni di COMPATIBILITÀ CINEMATICA:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_0} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_0} \qquad \varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{h} = \frac{\delta}{h}$$

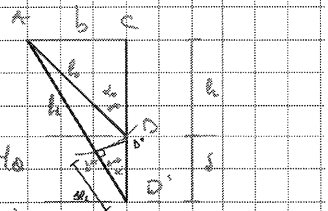
Essendo i fili collegati alla stessa massa m, le tre deformazioni non possono essere indipendenti, ma gli allungamenti devono essere legati fra loro.

Per farlo, utilizziamo δ. Questo è semplice per il filo centrale

$$\varepsilon_3 = \frac{\delta}{h}$$

Ci sono 2 possibili approcci al problema:

- approccio geometrico.



$$\Delta l_1 = l_1 - l_0$$

Per riportare l_0 su l_2 dovrei usare un compasso l_0 nel caso di piccoli spostamenti, posso confondere e tracciare la tangente, trovando Δ''

$$\Delta l_2 = l_2 - l_0 \simeq \delta \cos\alpha \simeq \delta \cos\alpha_0$$

↑ triangolo $\Delta^* \Delta' \Delta''$; ↑ i due angoli sono circa uguali

Inoltre $l_0 \cos\alpha_0 = h$, da cui →

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\delta \cos\alpha_0}{l_0} = \dfrac{\delta}{h} \cos^2\alpha_0 \\ \varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{h} \cos^2\alpha_0 \end{cases}$$

Master COPY COPIERIA 3819837755

Mancano ancora le equazioni di LEGAME COSTITUTIVO:

$$\begin{cases} T_1 = EA\,\varepsilon_1 \\ T_2 = EA\,\varepsilon_2 \\ T_3 = EA\,\varepsilon_3 \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Otteniamo infine 8 equaz e (7) incognite → la soluzione esiste ed è unica

determinata dall'aver localmente vincolato la simmetria del problema; senza vincolo avrei una 8ª incognita, lo spostamento orizzontale di m.

Risolvendo ho:

$$T_1 = T_2 = EA\,\frac{\delta}{h}\cos^2\alpha_0$$

$$T_3 = EA\,\frac{\delta}{h} \qquad \rightarrow \; 2\cos\alpha_0\,\frac{EA}{h}\cos^2\alpha_0\,\delta + \frac{EA}{h}\delta - P = 0$$

da cui $$\boxed{\delta = \frac{\frac{Ph}{EA}}{1 + 2\cos^3\alpha_0}}$$

con questo calcolo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e da cui T_1, T_2 e T_3

Ho trovato una soluzione unica in quanto ho linearizzato il problema grazie all'ipotesi di piccoli spostamenti.

La soluzione trovata dipende linearmente dai dati del problema, quindi $\delta \propto P$

- approccio analitico (utilizziamo la serie di Taylor)

$$\Delta l_2 = l_2 - l_0 \quad \text{dove} \quad l_2 = \sqrt{b^2 + (h+\delta)^2} \;\overset{\text{ipotesi}}{\underset{\text{piccoli}}{}}\; = \sqrt{b^2 + h^2 + 2h\delta + \delta^2}$$

δ^2 è un infinitesimo (δ è già piccolo, ora è al quadrato addirittura) e lo posso trascurare.

$$\simeq \sqrt{\underbrace{b^2+h^2}_{l_0^2}+2h\delta} = \sqrt{l_0^2+2h\delta} = l_0\sqrt{1+\frac{2h}{l_0^2}\delta}$$

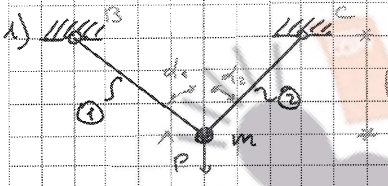
Dalla serie di Taylor ho $\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2}$, da cui

$$\simeq l_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{2h\delta}{l_0^2}\right) = l_0+\frac{h}{l_0}\delta$$

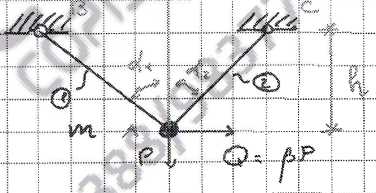
$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_0} = \frac{l_1}{l_0}-1 \simeq 1+\frac{h}{l_0^2}\delta - 1 = \frac{\delta}{h}\cos^2\alpha_0$$

Esercizi:

1)

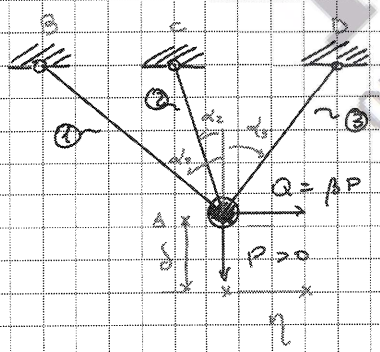


2)



è ancora isostaticamente determinato. Per quale valore di β entrambi i fili sono ancora in trazione?

3)



EA = cost

Per quale valore di β entrambi i fili sono ancora in trazione?

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745