Scienza delle Costruzioni

Lezioni del professor Valvo
Esercizi per orale svolti da me

Lapo Calosci

master COPY COPISTERIA

master COPY COPISTERIA

1.03.2022

TEORIA DELLE TRAVI

- Statica e cinematica di travi e travrature rigide
- Statica e cinematica di travi e travrature deformate
- Teorema dei Lavori Virtuali
- Problema di equilibrio elastico (di travi deformate elasticamente)
- Stabilità dell'equilibrio di travi e travrature.

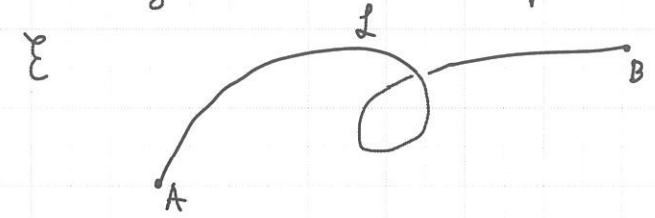
TRAVI RIGIDE

Il concetto di trave viene introdotto per modellare corpi reali e componenti strutturali che abbiano un aspetto "allungato", ovvero che siano caratterizzati da una dimensione (la lunghezza) prevalente sulle altre due (le dimensioni trasversali).
Gli esempi nella tecnica sono innumerevoli in tutti gli ambiti dell'Ingegneria ed a tutte le scale di osservazione: dalle colonne di marmo di un tempio greco alle membrature di un moderno edificio d'acciaio; a una scala maggiore, l'impalcato di un ponte o un intero grattacielo possono essere modellati come travi. In ambito aeronautico, i longheroni e le centine che formano la struttura di un'ala di aereo possono essere modellati come travi; ad una scala maggiore, l'intera ala può essere modellata come trave.
Gli esempi potrebbero proseguire includendo oggetti che non sono realizzati dall'Uomo. Oggi la Biomeccanica applica i modelli meccanici allo studio di esseri viventi: ossa di arti allungati, fusti e rami d'albero possono essere modellati come travi.

La soluzione di De S.V. può essere generalizzata a problemi dove non tutte le ipotesi di De S.V. sono verificate (es. presenza di forze di volume).

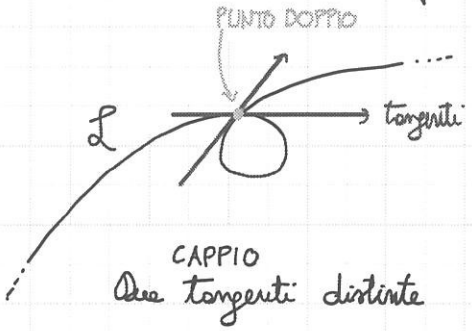
Definizione Geometrica di Trave:

Nello spazio Euclideo (tridimensionale) $\mathcal{E}$ (insieme di punti geometrici), consideriamo un arco di curva semplice e regolare $\mathcal{L}$ di estremi i pti A e B.

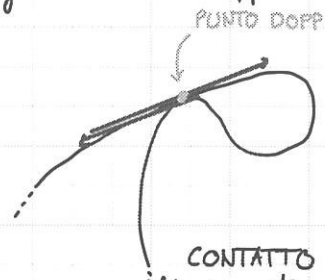


$\mathcal{L}$ deve essere

- SEMPLICE: non punti "doppi" (casi "cappio" e "contatto")

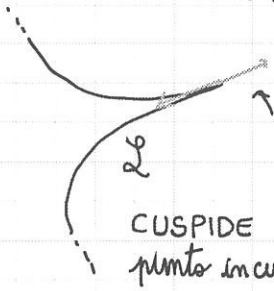


CAPPIO
Due tangenti distinte

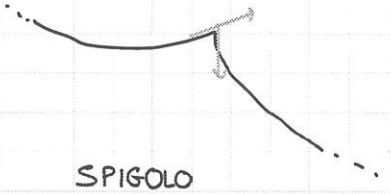


CONTATTO
Unica tangente

- REGOLARE: implica la def. della tangente in ogni punto della curva
Non si vogliono "cuspidi" o "spigoli"

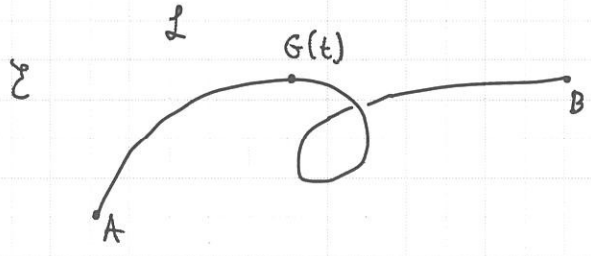


CUSPIDE
punto in cui il vettore tangente è def.to in direzione ma non in verso



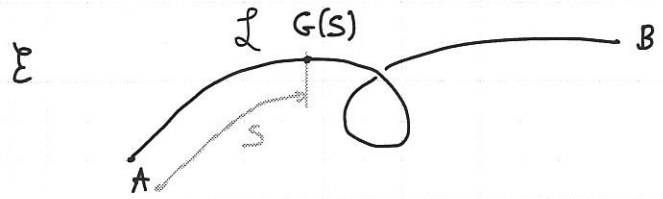
SPIGOLO
punto in cui il vettore tangente non è univ. mte def.to

Introduciamo una descrizione parametrica della curva, che associa a ciascun valore di un parametro $t \in [t_A, t_B] \subset \mathbb{R}$ un punto $G(t) \in \mathcal{L}$, con $G(t_A) \equiv A$ e $G(t_B) \equiv B$.



Si introduce l'ascissa curvilinea s misurata - per es. da A.
L lunghezza di $\mathcal{L}$:

$s \in [0, L] \subset \mathbb{R}$ con $G(0) \equiv A$, $G(s) \in \mathcal{L}$ e $G(L) \equiv B$

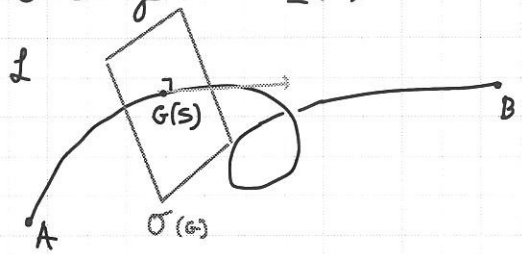


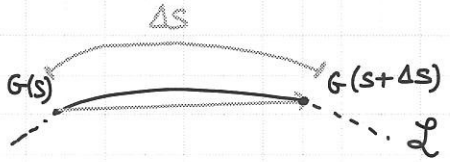
s = lunghezza $\widehat{AG}$

Per le ipotesi fatte, in ogni punto $G(s)$ di $\mathcal{L}$ è def.to il versore tangente:

$$\underline{t}(s) = \frac{dG(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s}$$

e di conseguenza anche il piano trasversale $\sigma(G)$ ovvero il piano passante per G ortogonale a $\underline{t}(s)$.

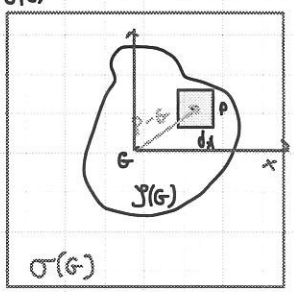




Consideriamo adesso una superficie piana $\mathcal{S}(G) \subset \sigma(G)$ tale che G ne sia il centro (geometrico) (può essere chiamato Baricentro):

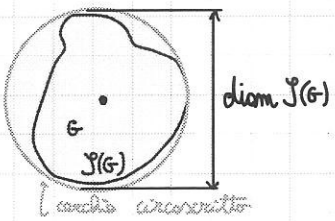
$$\int_{\mathcal{S}(G)} (P-G)\, dA = 0 \quad \left(= \int_{\mathcal{S}(G)} (x\underline{i} + y\underline{j})\, dA = 0 \Rightarrow \begin{cases} \int_{\mathcal{S}(G)} x\underline{i}\, dA = 0 \\ \int_{\mathcal{S}(G)} y\underline{j}\, dA = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} S_x = \int_{\mathcal{S}(G)} x\, dA = 0 \\ S_y = \int_{\mathcal{S}(G)} y\, dA = 0 \end{matrix}\right)$$

dove $\underline{P} \in \mathcal{S}(G)$ è un punto generico della superficie e dA ne è l'elemento d'area



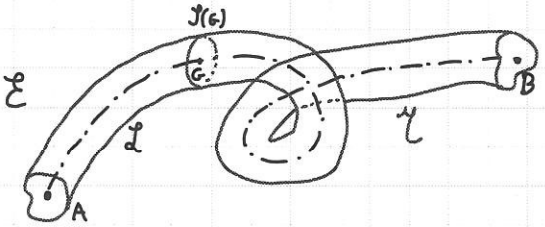
Imponiamo, inoltre, che diam $\mathcal{S}(\underline{P})$ siano piccole rispetto alla lunghezza L, ovvero che sia

$$\sup_{G \in \mathcal{L}} \text{diam}\, \mathcal{S}(G) << L$$



Consideriamo adesso la regione tridimensionale "spazzata" da $\mathcal{S}(G)$ quando il suo centro si muove da A a B percorrendo la curva $\mathcal{L}$

$$\mathcal{V} = \bigcup_{G \in \mathcal{L}} \mathcal{S}(G)$$



Se è verificata l'ulteriore condizione che ciascun punto di $\mathcal{V}$ sia ottenuto una sola volta (cioè non ci siano autointersezioni) allora diremo che $\mathcal{V}$ è una regione a forma di trave.
La condizione implica che

$$\mathcal{S}(G(s_1)) \cap \mathcal{S}(G(s_2)) = \emptyset \qquad \forall s_1, s_2 \in [0,L] \text{ con } s_1 \neq s_2$$

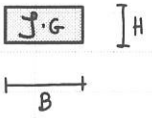
Adesso $\mathcal{L}$ è la LINEA D'ASSE DELLA TRAVE e $\mathcal{S}(G)$ la SEZIONE TRASVERSALE.

La trave si dirà di SEZIONE COSTANTE se $\mathcal{S}(G)$ non varia da punto a punto (se non per la direzione normale a $\sigma(G)$); altrimenti, si dirà di SEZIONE VARIABILE.

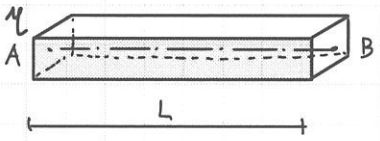
La trave si dirà GEOMETRICAMENTE PIANA se $\mathcal{L}$ è contenuta in un piano. In particolare la trave si dirà RETTILINEA se $\mathcal{L}$ è un segmento di retta.

Nel seguito tratteremo prevalentemente, ma non esclusivamente, il caso di travi piane rettilinee.

Es:



$\mathcal{S} = [0,B] \times [0,H]$



$\mathcal{V} = \mathcal{S} \times [a,L]$

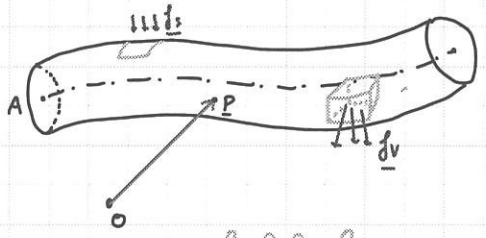
master COPY COPISTERIA

2.03.2022

STATICA DELLE TRAVI

Le forze esterne applicate ad una trave, ovvero interazioni con altri corpi, possono essere di 2 tipi:

- FORZE A DISTANZA: esercitate nei punti interni della trave ed assegnate per unità di volume. $\underline{f}_d(P)$, $P \in \mathcal{V}$
- FORZE DI CONTATTO: esercitate sulla frontiera della trave ed espresse per unità di area. $\underline{f}_c(P)$, $P \in \partial\mathcal{V}$.



Le forze a distanza sono solitamente forze attive, cioè di cui è nota la distribuzione in base a qualche principio fisico.

Le forze di contatto sono a volte forze reattive, cioè dovute all'impedito moto del corpo a causa dell'interazione con altri corpi.

calcolabili con equazioni di equilibrio statico dei corpi.

(In teoria, le ipotesi di De Saint Venant non accettano né forze concentrate, né coppie concentrate e distribuite. Nella pratica però si accettano forze concentrate se le pensiamo come risultanti di forze distribuite su un'area o su un volume molto piccolo).

Consideriamo la trave come <u>corpo rigido</u> ⇒ per l'equilibrio è necessario che siano verificate le 2 eq. cardinali.

Detto O il polo rispetto a cui calcolare il momento risultante, si ha: