master COPY COPISTERIA

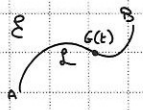
master COPY COPISTERIA

TEORIA DELLE TRAVI

Concetti introduttivi

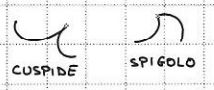
Con il modello della TRAVE si fa riferimento a dei componenti strutturali la cui dimensione longitudinale prevalga sulle altre due trasversali. Tale modello può essere utilizzato per i longheroni e le centine di un'ala e talvolta può essere esteso a quest'ultima nella sua interezza.

Consideriamo un arco di curva SEMPLICE e REGOLARE $\mathcal{L}$ di estremi A e B nello spazio euclideo tridimensionale $\mathcal{E}$. Con l'aggettivo "semplice" escludiamo che la curva torni su sé stessa formando un CAPPIO (punto con due tangenti distinte) o un CONTATTO (punto "doppio" con un'unica tangente).



La regolarità della curva assicura invece che si possa definire la tangente della curva in ogni punto, escludendo la presenza di cuspidi o spigoli.





Possiamo così parametrizzare la curva, associando ad ogni valore di un parametro $t \in [t_A\ t_B] \subset \mathbb{R}$ un punto $G(t) \in \mathcal{L}$, in modo che:

$$G(t_A) = A \quad \text{e} \quad G(t_B) = B.$$

In particolare, è conveniente scegliere come parametro l'ASCISSA CURVILINEA s, misurata a partire da un estremo. Se indichiamo con L la lunghezza di $\mathcal{L}$, abbiamo:

$$s \in [0, L] \quad \text{t.c.} \quad G(0) = A,\ G(s) \in \mathcal{L}\ \forall s \quad \text{e} \quad G(L) = B.$$



Possiamo così definire il versore tangente:

$$\underline{t}(s) = \frac{dG}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s}$$

ed il PIANO TRASVERSALE $\pi_t(G)$, passante per G ed ortogonale a $\underline{t}(s)$.

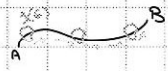
Consideriamo quindi una superficie piana $\mathcal{S}(G) \subset \pi_t(G)$ con centro in G:

$$\int_{\mathcal{S}(G)} (P - G)\, dA = 0 \qquad \text{con } P \in \mathcal{S} \text{ generico punto e } dA \to \text{elemento di superficie.}$$

ed imponiamo che le dimensioni di $\mathcal{S}$ siano piccole rispetto a L:

$$\sup_{G \in \mathcal{L}} \text{diam}\, \mathcal{S}(G) \ll L.$$

Facendo scorrere $\mathcal{S}(G)$ su $\mathcal{L}$ otteniamo così una trave. Si è introdotto il sup perché la sezione $\mathcal{S}(G)$ può anche variare lungo la linea d'asse $\mathcal{L}$. Non riportiamo la scrittura analitica dell'ipotesi che esclude che la trave si autointersechi perché è piuttosto laboriosa.



Spesso consideremo i casi particolari (semplificati) di trave seguenti:

(i) TRAVE A SEZIONE COSTANTE → $\mathcal{S}(G)$ non varia lungo $\mathcal{L}$.

(ii) TRAVE PIANA → $\mathcal{L}$ è contenuta in un piano. In particolare la trave si dice RETTILINEA se $\mathcal{L}$ è un segmento di retta.

master COPY COPISTERIA

master COPY COPISTERIA

STATICA DELLE TRAVI

Statica delle travi

Le forze agenti su una trave sono:

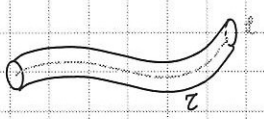
(i) DI CONTATTO → tipicamente agenti sulla superficie esterna, come i vincoli, ed incognite.

(ii) A DISTANZA → generalmente applicate in tutti i punti della trave, come $m\vec{g}$, e note.

Le travi sono corpi rigidi, é perció necessario che siano soddisfatte le due cardinali della statica:

- $\underset{\sim}{R} = \int_{\mathcal{T}} \underset{\sim}{f_d}(P)\,dV + \int_{\partial\mathcal{T}} \underset{\sim}{f_c}(P)\,dA = \underset{\sim}{0}$ con f_c e f_d → forze di contatto ed a distanza per unità di area/volume
- $\underset{\sim}{M_o} = \int_{\mathcal{T}} (P-O)\times \underset{\sim}{f_d}(P)\,dV + \int_{\partial\mathcal{T}} (P-O)\times \underset{\sim}{f_c}\,dA = \underset{\sim}{0}$ con $\mathcal{T}$ → trave

che per come abbiamo definito la regione $\mathcal{T}$ diventano:

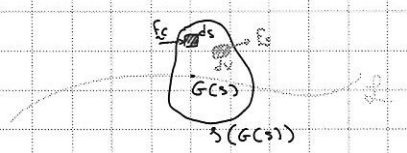


- $\underset{\sim}{R} = \int_0^L \left[\int_{\mathcal{S}(G(s))} \underset{\sim}{f_d}\,dA + \int_{\partial\mathcal{S}(G(s))} \underset{\sim}{f_c}(P)\,de \right] ds = \underset{\sim}{0}$
- $\underset{\sim}{M_o} = \int_0^L \left[\int_{\mathcal{S}(G(s))} (P-O)\times \underset{\sim}{f_d}\,dA + \int_{\partial\mathcal{S}(G(s))} (P-O)\times \underset{\sim}{f_c}(P)\,de \right] ds = \underset{\sim}{0}$

ed essendo:

$$P-O = (P-G(s)) + (G(s)-O)$$

possiamo ottenere:

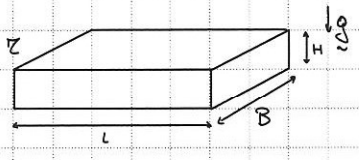


- $\underset{\sim}{R} = \int_0^L \underset{\sim}{p}(s)\,ds = \underset{\sim}{0}$
- $\underset{\sim}{M_o} = \int_0^L \left[(G(s)-O)\times \underset{\sim}{p_s}(s) + \underset{\sim}{c}(s) \right] ds = \underset{\sim}{0}$

dove con $\underset{\sim}{p}(s)$ e $\underset{\sim}{c}(s)$ indichiamo rispettivamente la risultante ed il momento risultante rispetto a $G(s)$ delle forze applicate su $\mathcal{S}(G(s))$. In questo modo studiamo l'equilibrio della trave con riferimento solo ad $\mathcal{L}$, piuttosto che al volume $\mathcal{T}$. Se $\mathcal{T}$ é geometricamente piana, le forze applicate sono contenute nello stesso piano ed i momenti hanno asse ortogonale ad esso, la trave si dice STATICAMENTE PIANA.

esempio

Consideriamo la trave in figura e soggetta al proprio peso. Sia inoltre poggiata alle estremitá per tratti molto brevi, cosí da considerare le azioni di contatto come concentrate ai due estremi. Abbiamo:



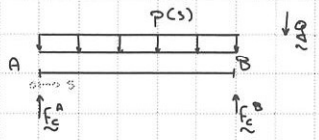
$$\underset{\sim}{f_d}(P)\,dV = \underset{\sim}{g}\,dm = \rho \underset{\sim}{g}\,dV \Rightarrow \underset{\sim}{f_d}(P) = \rho \underset{\sim}{g} = \text{cost.}$$

e quindi:

- $\underset{\sim}{P}(s) = \int_{\mathcal{S}(G(s))} \rho \underset{\sim}{g}\,dA = \rho \underset{\sim}{g}\, BH$

- $\underset{\sim}{\mathcal{C}}(s) = \int_{\partial(G(s))} (P - G(s)) \times \underset{\sim}{f}_d \, dA = 0$.

Possiamo così ridurre il problema allo scheme in figura, perciò scriviamo:



$$\underset{\sim}{R} = \int_0^L \rho \underset{\sim}{g} BH\,ds + \underset{\sim}{f}_c^A + \underset{\sim}{f}_c^B = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{M}_A = \int_0^L (G(s) - A) \times \rho \underset{\sim}{g} BH\,ds + (A-A) \times \underset{\sim}{f}_c^A + (B-A) \times \underset{\sim}{f}_c^B = \underset{\sim}{0}.$$

Introducendo un sistema di riferimento opportuno e risolvendo il sistema si ottiene:

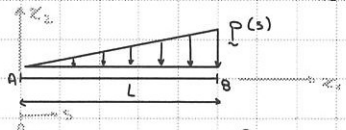
$$\underset{\sim}{f}_c^A = \underset{\sim}{f}_c^B = \frac{1}{2} \underset{\sim}{P} \quad \text{(Peso)}$$



■

ESERCIZI

① Consideriamo lo schema in figura. Notiamo come $\underset{\sim}{p}(s)$ vari linearmente. Scriviamo quindi le equazioni in componenti.



$$\underset{\sim}{p}(s) = -\frac{\overline{p}}{L} s \, \underset{\sim}{e}_1$$

$\xrightarrow{x_1}$ $\quad 0 = 0$

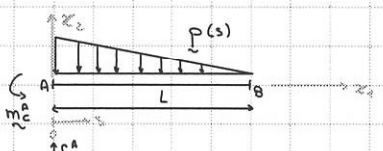
$x_2\uparrow$ $\quad \int_0^L p(s)\,ds + f_c^A + f_c^B = 0 \Rightarrow \int_0^L -\frac{\overline{p}}{L} s\,ds + f_c^A + f_c^B \Rightarrow f_c^A + f_c^B = \frac{\overline{p} L}{2}$

(A) $\quad \int_0^L s p(s)\,ds + s_A f_c^A + s_B f_c^B = 0 \Rightarrow -\frac{\overline{p}}{L} \int_0^L s^2 ds + L f_c^B = 0 \Rightarrow f_c^B = \frac{\overline{p} L}{3}$.

Abbiamo così:

$$f_c^B = \frac{1}{3} \overline{p} L \quad \text{e} \quad f_c^A = \frac{1}{2} \overline{p} L - f_c^B = \frac{1}{6} \overline{p} L.$$

② Consideriamo lo schema in figura. Troviamo il valore delle reazioni vincolari.



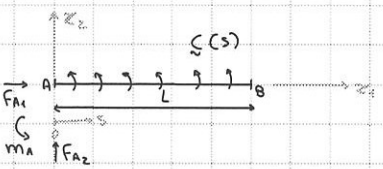
$$\underset{\sim}{\tilde{p}}(s) = -\overline{p} \frac{L-s}{L} \underset{\sim}{e}_2$$

$\xrightarrow{x_1}$ $\quad 0 = 0$

$x_2\uparrow$ $\quad \int_0^L p(s)\,ds + f_c^A = 0 \Rightarrow f_c^A = \overline{p} \int_0^L \frac{L-s}{L} ds = \frac{1}{2} \overline{p} L$

(A) $\quad \int_0^L s p(s)\,ds + s_A f_c^A + m_c^A = 0 \Rightarrow m_c^A = \frac{\overline{p}}{L} \int_0^L (L-s) s\,ds = \frac{1}{2} \overline{p} L^2$.

③ Consideriamo lo schema in figura. Troviamo il valore delle reazioni vincolari.



$$\underset{\sim}{c}(s) = \frac{s}{L} \overline{c} \, \underset{\sim}{e}_3$$

$\xrightarrow{x_1}$ $\quad f_{A_1} = 0$

$x_2\uparrow$ $\quad f_{A_2} = 0$

(A) $\quad \int_0^L c(s)\,ds + m_A = 0 \Rightarrow m_A = -\frac{\overline{c}}{L} \int_0^L s\,ds = -\frac{1}{2} \overline{c} L$.

■

Non abbiamo considerato, fino ad ora, le azioni interne. Se immaginiamo di dividere in due parti la trave, come in figura, esse non sono in equilibrio.