Scadenza luglio 2018

① PRETEST 10 domande 7/10 per passare

② 3 ESERCIZI ⇒ VOTO finale

③ ORALE, STESSO APPELLO

- homepage Visciglia 2016/2017 per algebra
- homepage gaiffi

e-mail visciglia@dm.unipi.it → per ricevimento _ Mattina mercoledì 9.00
STUDIO 210 dipartimento di matematica

LIBRO ABATE della McGRAWILL

master COPY COPISTERIA

# ALGEBRA LINEARE

• SPAZIO VETTORIALE

↳ SISTEMI LINEARI → le incognite hanno potenza 1 $\begin{cases} ax^1+by^1+c=0 \\ dx^1+ey^1+f=0 \end{cases}$

↳ determinante

↳ teoria spettrale (studio degli autovalori)

INSIEMI (TEORIA non ASSIOMATICA)

Un insieme è una famiglia di oggetti che posso descrivere in vari modi

{1, 3, sedia} è un insieme

{studenti della B2I} è un insieme

$\mathbb{N}$ numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali $\left\{\frac{m}{n} \text{ tali che } m, n \text{ sono in } \mathbb{N}\right\}$

$\mathbb{R}$ numeri reali

$\mathbb{C}$ numeri complessi

$A \times B = \{(a,b) \text{ t.c. } a \text{ sta in } A,\ b \text{ sta in } B\}$

esempio $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c\}$

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \text{ t.c. } x \text{ sta in } \mathbb{R} \text{ e } y \text{ sta in } \mathbb{R}\}$

{polinomi della variabile x}

$p(x) = 2, 5, \pi, \sqrt{2}$ sono polinomi di grado 0

$p(x) = a + bx$ esempio $\sqrt{2} + \pi x$ polinomio di grado 1

($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)

$p(x) = ax^2 + bx + c$ polinomio di grado 2

($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$)

$\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \text{ t.c. } a_0, a_1, \dots, a_m \text{ numeri reali con } m \in \mathbb{N}\}$

$\in$ appartenenza $\quad \notin$ non appartenenza

esempio $2 \in \mathbb{N}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

" " $2 \in \{\text{polinomi}\}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dimostriamo per assurdo che $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

Se per assurdo $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m.c.m $\{m,n\} = 1$

elevo al quadrato perché c'è un'uguaglianza

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ pari} \Rightarrow m \text{ pari}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 2k}$$

ma siccome $2n^2 = m^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$ allora anche n è pari

Ma ciò non è possibile perché m.c.m di $\{m,n\} = 1$

master COPY COPISTERIA

$\Rightarrow$ "implica" $\Leftrightarrow$ "equivalente"

( ) ipotesi ( ) tesi

↓ ESEMPIO

un triangolo è equiangolo $\Leftrightarrow$ se e solo se è equilatero

$n$ è multiplo di 4 $\Rightarrow$ $n$ è pari

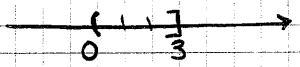
$\not\Leftrightarrow$ falso

$A \subseteq B$

sottoinsieme

esempio $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

$(0,3]$




$A \cap B$ intersezione

$A = (0,2)$ $\quad A \cap B = \{1\}$

$B = \mathbb{N}$

$A \cup B$ unione $\quad A \cup B = \{[0,2], 3, 4, 5, \dots\}$

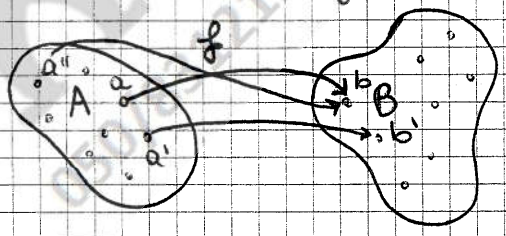
$\{a \in A$ tale che $\dots\}$

$\{a \in A \mid \}$

esempio $\{$numeri naturali pari$\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

FUNZIONE TRA INSIEMI $\quad b = f(a) \quad b' = f(a')$

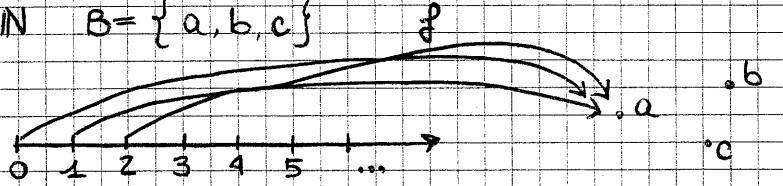
- $A$ (dominio)
- $B$ (codominio)

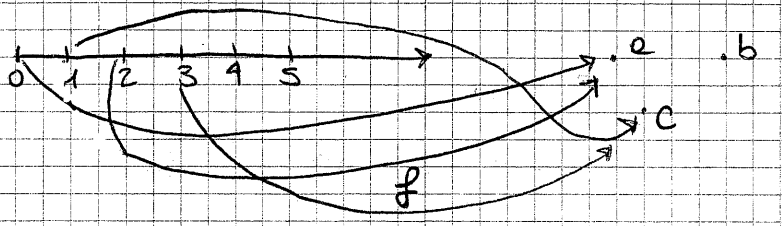



- $f$ è una legge che associa ad ogni elemento di $A$, uno e un solo elemento di $B$

ESEMPIO

$A = \mathbb{N} \quad B = \{a, b, c\}$

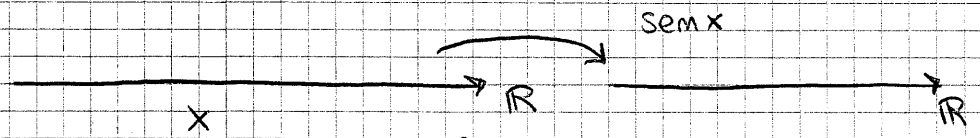





ESEMPIO

$A = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R}$




$f(x) = \sin x$

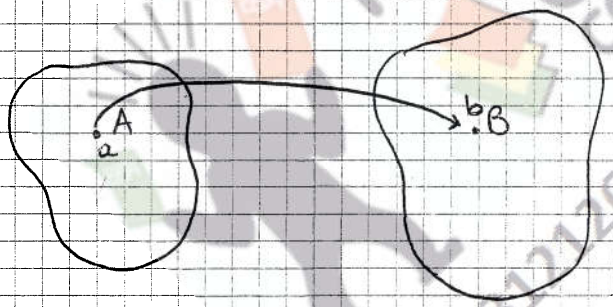
dominio di una funzione




- $f: A \to B$ si dice SURGETTIVA se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A tramite f.

| ∀ per ogni, ∃ esiste, ∃! esiste unico |
|---|

f surgettiva




$\forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$

esempio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ è suriettiva

esempio

$f(x) = x^3$ è suriettiva $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

esempio

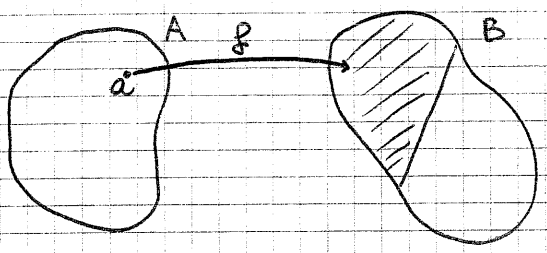
$f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva

master COPY COPISTERIA 050/833126 388/9937745

$f: A \to B$

**Def.** $f$ è suriettiva se $\forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$

**Def.** Immagine di $f$ $(\mathrm{Im}\, f) = \{ f(a) \in B \mid a \in A \} = \{ b \in B \mid f(a) = b$ per qualche $a \in A \}$



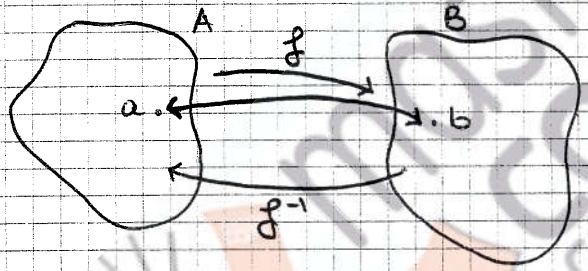

$\mathrm{Im}\, f \subseteq B$

$f$ è suriettiva $\iff \mathrm{Im}\, f = B$

$f: A \to B$ allora $f: A \to \mathrm{Im}\, f$ (suriettiva)

**Def.** $f: A \to B$ si dice iniettiva se $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

**Def** $f: A \to B$ è bigettiva se è iniettiva e suriettiva sia suriettiva




$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

ESempi

$$A = \{\text{polinomi}\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\Psi$$

$$x^m$$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \longrightarrow m$$

$$\neq 0 \to \text{polinomio di grado } m$$

$$f(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m) = \text{grado}\,(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m)$$

Questa funzione è suriettiva? no, ha per immagine i numeri naturali

" " è iniettiva? no, per esempio i polinomi di grado 1 sono infiniti!

- $f$ non è suriettiva $\boxed{\mathrm{Im}\, f \subsetneq \mathbb{N}}$
- $f$ non è iniettiva perché $f(1+x) = f(x)$