ALGEBRA LINEARE

master COPY

Definizioni

MATRICE → siano $K, n \in \mathbb{N}$ allora $A \in Mat(K \times n)$ è l'insieme di $K \times n$ numeri organizzati lungo K righe lungo n

MATRICE COLONNA → n-upla di numeri uno sotto l'altro, $A \in Mat(n \times 1)$

MATRICE QUADRATA → se $n = K$, $A \in Mat(n \times n)$

MATRICE RIGA → $A \in Mat(1 \times n)$

RIGA I-ESIMA → data una $A \in Mat(K \times n)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i:1\dots n \\ j:1\dots K}}$ si chiama $R_i \in Mat(1 \times n)$ la riga definita tramite gli elementi della riga i-esima di A

COLONNA J-ESIMA → data una matrice $A \in Mat(K \times n)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i:1\dots n \\ j:1\dots K}}$ si chiama $C^j \in Mat(K \times 1)$ la colonna definita tramite gli elementi della j-esima colonna di A

MATRICE COMPLETA

MATRICE DEI COEFFICIENTI

PIVOT → per la riga R_i di una matrice $A \in Mat(K \times n)$ assegnata, si definisce PIVOT il primo elemento non nullo nella riga R_i (cercato uno in ogni riga tranne se è identicamente nulla)

MATRICE A SCALA → data una matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i:1\dots n \\ j:1\dots K}} \in Mat(K \times n)$ diciamo che A è a scala se valgono le seguenti proprietà: se la riga R_i è fatta da soli zeri allora anche la successiva è fatta da soli zeri, il PIVOT della riga successiva, se non nulla è più a destra della riga precedente.

MOSSE ELEMENTARI SULLE MATRICI

COME CAPIRE SE UN SISTEMA HA 0, 1, ∞ SOLUZIONI

LO SPAZIO VETTORIALE DELLE MATRICI

IL PRODOTTO MATRICIALE

MATRICE IDENTITÁ → si definisce matrice identità di dimensione n, la matrice quadrata $n \times n$ che ha la seguente proprietà: $(a_{ij})_{\substack{i:1\dots n \\ j:1\dots n}}$ $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $a_{ii} = 1$

MATRICE INVERSA → data una matrice A essa si dice invertibile $\Leftrightarrow \exists B \in Mat(n \times n)$ tc $AB = BA = Id$

APPLICAZIONE DELLA MATRICE INVERSA PER RISOLVERE SISTEMI ASSOCIATI

CONCETTO DI CAMPO

CONCETTO DI SPAZIO VETTORIALE

CONCETTO DI SOTTOSPAZIO VETTORIALE

COMBINAZIONE LINEARE → dati n elementi di V $v_1 \dots v_n \in V$ e n elementi di $\mathbb{K}$ $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ si definisce CL dei vettori $v_1 \dots v_n$ a coefficienti $\lambda_1 \dots \lambda_n$ il vettore così costruito $\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n \in V$

SPAN → dato uno spazio vettoriale $(V, \mathbb{K})$ e dati $v_1 \dots v_n \in V$ combinati linearmente con $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ si definisce span l'insieme dei vettori ottenuti come combinazione lineare di $v_1 \dots v_n$ con $\lambda_1 \dots \lambda_n \longrightarrow span\{v_1 \dots v_n\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \,/\, \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}\}$

INDIPENDENZA LINEARE → dati $v_1 \dots v_n$ vettori $\in V$ si dice che sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ $(\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$

SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO → se $\exists v_1 \dots v_n \in V$, n numero finito tc $span\{v_1 \dots v_n\} = V$

BASE → si dice base di uno spazio vettoriale un'insieme di vettori $v_1 \dots v_n \in V$ tc $span\{v_1 \dots v_n\} = V$ e $v_1 \dots v_n$ linearmente indipendenti

BASI CANONICHE

DIMENSIONE → si dice dimensione di uno spazio vettoriale V tc $span\{v_1 \dots v_n\} = V$, la cardinalità di una qualsiasi base di V (il numero di vettori linearmente indipendenti)

LA MATRICE SIMMETRICA data $(a_{ij})_{\substack{i:1\dots n \\ j:1\dots K}}$ si dice simmetrica $Sym(n \times n)$ se $a_{ij} = a_{ji}$

LA MATRICE ANTISIMMETRICA se $a_{ij} = -a_{ji}$

COSTRUZIONI INSIEMISTICHE DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE SOMMA $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \,/\, w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$

LA FORMULA DI GRASSMAN $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim V$

LA SOMMA DIRETTA $V = U \oplus W \Leftrightarrow \dim(U + W) = \dim V$

DETERMINANTE DI MATRICI PARTICOLARI

- MATRICE TRASPOSTA ${}^tA \rightarrow \det A = \det A^t$
- MATRICE DIAGONALE e TRIANGOLARE $\rightarrow$ det = prodotto degli elementi sulla diagonale

IL TEOREMA DI BINET $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

LA MATRICE INVERSA Se $A \in Mat(n \times n)$ invertibile $(\det A \neq 0)$ allora $A^{-1} = B = b_{ij}$ dove

$$b_{ij} = \frac{C_{ij}}{\det A} \qquad C_{ij} = (-1)^n \cdot \det(A_{ij})$$

IL RANGO DI UNA MATRICE Sia $A \in Mat(n \times k)$ si definisce $rg(A) = \max h$: il numero intero $\in \{0, 1, \dots, \min\{n, k\}\}$ tc $\exists$ minore $h \times h$ tc $\det \neq 0$

IL MINORE DI UNA MATRICE Sia A una matrice $A \in Mat(n \times k)$ si definisce minore la matrice $n \times h$ con $n \in \{m.n\ \min\{n, k\}\}$ ottenuta intercalando n righe e h colonne di A

AUTOVALORI E AUTOVETTORI Data un'applicazione lineare $L: V^n \rightarrow V^n$ si definisce autovalore di L il coefficiente λ se $\exists w \in V$ tc $Lw = \lambda w$. Il tal caso w si dice AUTOVETTORE associato a λ

POLINOMIO CARATTERISTICO $\rightarrow$ associato ad $A \in Mat(n \times n)$, $p(\lambda) = \det(A - Id\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots$
$p(\lambda) = (\lambda Id - A) = (\lambda - \lambda_n) \dots (\lambda - \lambda_1)$ le cui soluzioni sono gli autovalori di $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA Sia $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ e sia $\bar{\lambda} \in \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ allora si chiama molteplicità algebrica il numero di volte in cui si ripete $(\lambda - \bar{\lambda})$. Si indica con $m_a(\bar{\lambda})$.

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $m_g(\bar{\lambda}) = \dim\{\ker(\bar{\lambda} I - A)\}$ data $L: V^n \rightarrow V^n$ lineare

MATRICE DIAGONALIZZABILE Data un'applicazione lineare $L: V^n \rightarrow V^n$ si dice che la matrice $[L]_{\{v_1 \dots v_n\}}^{\{v_1 \dots v_n\}}$ è diagonalizzabile se λ_0 autovalore della matrice con $m_a(\lambda_0) = m_g(\lambda_0)$
$\hookrightarrow$ basi di V^n

IL CALCOLO DEGLI AUTOVETTORI Data un'applicazione $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare e la matrice associata $[L]_{\{v_1 \dots v_n\}}^{\{v_1 \dots v_n\}}$ tc $M^{-1} [L]_{\{v_1 \dots v_n\}}^{\{v_1 \dots v_n\}} M = [L]_{\{w_1 \dots w_n\}}^{\{w_1 \dots w_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ gli autovettori sono gli elementi delle colonne di M.
$\hookrightarrow$ basi di V^n = autovettori

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono i parametri da cui dipendono le soluzioni del sistema associato.

MATRICI SIMMETRICHE

- una matrice simmetrica è uguale alla sua trasposta $\Rightarrow$ è diagonalizzabile
- gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti numeri reali

LA SEGNATURA (n_-, n_0, n_+) tc $n_- = \#\{\text{autovalori negativi}\}$, $n_0 \Rightarrow m_g(0)$, $n_+ = \#\{\text{autovalori positivi}\}$ e $n_- + n_0 + n_+ = n$

CALCOLARE LA SEGNATURA

- matrici (2×2) $\rightarrow$ $\det > 0 \rightarrow$ autovalori concordi $\rightarrow tr < 0$ $(-,-)$
  $\det < 0 \rightarrow$ autovalori discordi $\rightarrow tr > 0$ $(+,-)$
  $\det = 0 \rightarrow$ almeno un autovalore $\downarrow tr < 0$
  è nullo $\rightarrow (0,-,0)$ $(+,+,0)$ $(0,+,+)$
  mat id nulla $tr < A$ $tr > A$
- matrici $(n \times n)$ qualsiasi $\rightarrow$ **REGOLA DI CARTESIO** $\rightarrow$ sia $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \lambda_1 c_1 + c_0$ con $\lambda_n \dots \lambda_1 \in \mathbb{R}$ allora il numero delle variazioni di segno delle radici di tale polinomio corrisponde con il numero delle radici positive (n_+)

LE APPLICAZIONI LINEARI → dati due spazi vettoriali $(V,\mathbb{K})$ e $(W,\mathbb{K})$ con lo stesso campo si può definire un'applicazione lineare $L: V \to W$ tc $L(v_1+v_2) = Lv_1 + Lv_2$ $\forall v_1, v_2 \in V$ e $L(\lambda \cdot v) = \lambda L \cdot v$ $\forall v \in V$

L'APPLICAZIONE L_A → $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si può costruire una matrice tc $L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

$L_0: 0 \to 0$

NUCLEO DI UN'APPLICAZIONE LINEARE → Data $L: V \to W$ lineare, si definisce NUCLEO di L il sottospazio vettoriale di V tc $\ker L = \{v \in V \mid Lv = 0 \in W\}$

IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE Data $L: V \to W$ lineare, si definisce IMMAGINE di L il sottospazio vettoriale di W tc $\mathrm{Im} L = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tc } Lv = w\}$

DIMENSIONE DELL'IMMAGINE E DIMENSIONE DEL NUCLEO → data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow \dim V = \dim \ker L + \dim \mathrm{Im} L$

COSTRUIRE LA MATRICE ASSOCIATA A $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

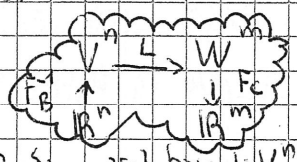
$A = (Le_1 \mid \dots \mid Le_n)$ $\{e_1 \dots e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$ $A \in Mat(m \times n)$

L'APPLICAZIONE F_B $F_B: V^n \to \mathbb{R}^n$, data $B = \{v_1 \dots v_n\} \in V$ base di V^n si definisce F_B l'applicazione lineare per cui $F_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ con $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

L'APPLICAZIONE F_B^{-1} $F_B^{-1}: \mathbb{R}^n \to V^n$ $F_B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = v = \lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n$

LA MATRICE DI L RISPETTO A B e C Sia $L: V^n \to W^m$ lineare e $B = \{v_1 \dots v_n\}$ base di V, $C = \{w_1 \dots w_n\}$ base di W^m allora si definisce $[L]_B^C$ la matrice così costruita:

$$[L]_B^C = \left(F_C \circ L \circ F_B^{-1} e_1 \mid \dots \mid F_C \circ L \circ F_B^{-1} e_n\right) = \left(F_C L v_1 \mid \dots \mid F_C L v_n\right)$$



LA MATRICE DI CAMBIO DI BASE Sia $L: V^n \to W^m$ lineare e $B = \{v_1 \dots v_n\}$ base di V^n e $C = \{w_1 \dots w_n\}$ base di W^m e $B' = \{v_1' \dots v_n'\}$ altra base di V^n e $C' = \{w_1' \dots w_n'\}$ altra base di W^m posso costruire $[L]_C^B$ e $[L]_{C'}^{B'}$ tc.

$$M_{C \to C'}^{-1} [L]_C^B M_{B \to B'} = [L]_{C'}^{B'} \quad \text{tc} \quad M_{B \to B'} = (F_B v_1' \mid \dots \mid F_B v_n') \text{ e } M_{C \to C'} = (F_C w_1' \mid \dots \mid F_C w_n')$$

LA TEORIA DEL DETERMINANTE

DETERMINANTE Il determinante è una funzione definita $\det: Mat(n \times n) \to \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà: (i) il $\det(Id) = 1$ (ii) Se una matrice ha due righe uguali il suo determinante è 0 (iii) LA LINEARITÀ del determinante ossia data $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \end{pmatrix}$ $\det A = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i' \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i'' \end{pmatrix}$ $R_i = \alpha R_i' + \beta R_i''$

IL CALCOLO DEL DETERMINANTE

* $A \in Mat(2 \times 2) \to \det A = ad - bc$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

* $A \in Mat(3 \times 3) \to$ SARRUS

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

* Per matrici con $n > 3 \to$ SVILUPPO DI LAPLACE

$\det(A) = a_{11} \det A_{11} + \dots a_{1n} \det A_{1n}$ (segni alterni)

matrice ottenuta togliendo da A 1° RIGA e 1ª COLONNA

IL PRODOTTO SCALARE dati due vettori $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ e $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ si definisce prodotto scalare: $x\cdot y = x_1\cdot y_1 + \dots + x_n y_n$

FORMA QUADRATICA → funzione associata ad una matrice $A\in Sym(n\times n)$ tc:

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_n\end{pmatrix} \longrightarrow (A\cdot x)\cdot x$ (prodotto matriciale; prodotto scalare)

$q_A\begin{pmatrix}x_1\\x_n\end{pmatrix}$

può essere:

DEFINITA POSITIVA	$q_A \geq c(x_1^2+\dots+x_n^2)$	$(0,0,2)$
DEFINITA NEGATIVA	$q_A \leq -c(x_1^2+\dots+x_n^2)$	$(2,0,0)$
SEMIDEFINITA POSITIVA	$q_A \geq 0$	$(0,1,1)$
SEMIDEFINITA NEGATIVA	$q_A \leq 0$	$(1,1,0)$
INDEFINITA	$\exists \begin{pmatrix}y_1\\y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_n\end{pmatrix}$ tc $q_A\begin{pmatrix}y_1\\y_n\end{pmatrix}>0$ e $q_A\begin{pmatrix}z_1\\z_n\end{pmatrix}<0$	$(1,0,0)$

FUNZIONE: Dato A un insieme di partenza (dominio) e B un insieme d'arrivo (codominio) si definisce funzione quella legge f tc $\forall a\in A\ \exists b\in B$ tc $f(a)=b$.

F. INIETTIVA: Una funzione $f: A\to B$ si dice iniettiva se $a_1, a_2\in A$ tc $a_1\neq a_2 \Rightarrow f(a_1)\neq f(a_2)$

F. SURIETTIVA: Una funzione $f: A\to B$ si dice suriettiva se $Imf=B$ ossia $\forall b\in B\ \exists a\in A$ tc $f(a)=b$

F. BIGETTIVA: Una funzione $f: A\to B$ si dice bigettiva se è sia INIETTIVA che SURIETTIVA.
Tale funzione è invertibile: $f^{-1}: B\to A$ tc $f^{-1}(b)=a$

MODELLO CONCRETO DI SPAZIO VETTORIALE $V_O^2=\{\vec{OP} \mid OP \text{ sta sul piano}\}$

retta $r=\{\vec{OP}_1+t(\vec{OP}_2-\vec{OP}_1)\}$ piano $\alpha=\{\vec{OP}+t(\vec{OQ}-\vec{OP})+s(\vec{OR}-\vec{OP})\}$

SISTEMA DI RIFERIMENTO AFFINE $RA(O,i,j)$

$\begin{cases}\vec{i}=\vec{OP}\\ \vec{j}=\vec{OQ}\\ \vec{OQ}\neq\vec{OO}\\ \vec{OP}\neq\vec{OO}\\ \vec{i}\neq\lambda\vec{j}\end{cases}$ O, P, Q non allineati

master copy
master copy
master copy

TEORIA DEL DETERMINANTE ~ TEOREMI

1. Se $\det(v_1 | \dots | v_n) \neq 0 \iff \{v_1 \dots v_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$

2. Data $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\exists A \in Mat(n\times n)$ tc $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$. Se $\det A \neq 0 \iff L$ invertibile

3. Data una matrice $A \in Mat(n\times n)$ e la sua trasposta $A^t \in Mat(n\times n) \Rightarrow \det A = \det A^t$

4. Data una matrice $A \in Mat(n\times n)$, $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} \pm \dots \pm a_{1n} \det A_{1n}$

5. TEOREMA DI BINET $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

6. Se $A \in Mat(n\times n)$ è invertibile allora $A^{-1} = B = b_{ij} = \dfrac{C^t}{\det A}$ dove $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

7. Sia $\{v_1 \dots v_k\}$ vettori di $V^n \Rightarrow \dim(\operatorname{span}\{v_1 \dots v_k\}) = rg\, A$ $\quad A = (Fc\, v_1 | \dots | Fc\, v_n) \in Mat(k\times n)$

8. Sia $L: V^n_{\mathcal{B}} \longrightarrow W^m_{\mathcal{C}} \Rightarrow \dim(\ker L) = n - \dim(\operatorname{Imm} L)$ $\quad A = [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in Mat(m\times n)$
$rg(A)$

9. Gli autovalori di $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono le soluzioni del pdinomio caratteristico

10. Sia λ_0 autovalore di A, $L: V^n \to V^n$ $\{v_1 \dots v_n\}$ base di V^n $A = [L]^{\{v_1 \dots v_n\}}_{\{v_1 \dots v_n\}}$, allora $1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$

11. Una matrice è diagonalizzabile $\iff m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0) \Rightarrow$ se $\lambda_1 \dots \lambda_n$ radici semplici A diagonalizzabile.

12. Se $A \in Sym(n\times n) \Rightarrow A = A^t \Rightarrow$ AUTOVALORI REALI

13. Sia $A \in Mat(n\times n)$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$ autovalori di $A \Rightarrow \det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

14. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ il pdinomio caratteristico di A allora il numero delle radici positive corrisponde con il numero delle variazioni di segno.

15. Data una matrice $A \in Sym(n\times n)$ e sia $q_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ la sua forma quadratica

allora $q_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

DIMOSTRAZIONE

11. Se $\det A \neq 0 \Rightarrow \{v_1 \dots v_n\} \in \mathbb{R}^n$ tc base di $\mathbb{R}^n$

$A = (v_1 | \dots | v_n)$

ossia se $\det A \neq 0 \Rightarrow v_1 \dots v_n$ linearmente indipendenti. Se per assurdo non fossero linearmente indipendenti quindi $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ con $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli quindi $\lambda_1 \neq 0$
$\Rightarrow v_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \Rightarrow$

$A = \left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \,|\, v_2 | \dots | v_n\right) \Rightarrow$ matrice con determinante uguale a zero

master copy