ALGEBRA LINEARE

26/09/2017
Lezione (1)

PROF. NICOLA VISCIGLIA

SITO: http://people.dm.unipi.it/~VISCIGLI

http://people.dm.unipi.it/~GALIFFI/ALGLINBIOMEDICA

EMAIL: VISCIGLI@DM.UNIPI.IT scrivere per → ricevimento → se non risponde è ok
→ breve domanda

RICEVIMENTO: MARTEDÌ ORE 09:00 STUDIO 210 AL DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
(bisogna prima inviare l'e-mail) "RICHIESTA RICEVIMENTO BIOMEDICA"

LIBRO DI TESTO: ABATE "ALGEBRA LINEARE" Mc GRAW ILL

PROGRAMMA: - SPAZIO VETTORIALE
- SISTEMI LINEARI
- DETERMINANTE
- TEORIA SPETTRALE → STUDIO AUTOVALORI

INSIEMI (teoria non assiomatica)

Un insieme è una famiglia di oggetti che possiamo descrivere in vari modi

$\mathbb{N}$ → insieme dei numeri naturali $\{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ → insieme dei numeri razionali $\left\{ \frac{m}{n} \text{ tali che } m, n \text{ siano in } \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{R}$ → insieme dei numeri reali $\{ \dots, \sqrt{2}, \pi, e \dots$ non appartengono né a $\mathbb{N}$ né a $\mathbb{Q} \}$

$\mathbb{C}$ → insieme dei numeri complessi

PRODOTTO TRA INSIEMI $A \times B = \{(a,b) \text{ tali che } a \text{ stia in } A \text{ e } b \text{ stia in } B\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

$A \times B = \{(1,a)(1,b)(1,c)(2,a)(2,b)(2,c)(3,a)(3,b)(3,c)\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \text{ tali che } x \text{ stia in } \mathbb{R} \text{ e } y \text{ stia in } \mathbb{R}\}$

Un polinomio è del tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_nx^n$

Un polinomio di grado 0 è un qualsiasi numero reale $p(x) = 2, 5, \sqrt{2}$

Un polinomio di grado 1 è del tipo $p(x) = a + bx$ Es $\sqrt{2} + \pi x$ $a \in b \in \mathbb{R}$

Un polinomio di grado 2 è del tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$

$\{$polinomi della variabile $x\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (n naturale) con $a_0, a_1 \dots a_n$ numeri reali, $n \in \mathbb{N}\}$

SIMBOLOGIA

- $\in$ → appartenenza
- $\notin$ → non appartenenza

  Es. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ → DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO Se per assurdo $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ $\{m, n\} = 1 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ è pari $\Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow m = 2k$. Ma siccome $2n^2 = m^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow n$ è pari → ASSURDO perché m ed n non possono avere fattori in comune
- $( ) \Rightarrow ( )$ → implica
- $( ) \Leftrightarrow ( )$ → ciò che è a sinistra implica quello a destra e viceversa

  Es. Un triangolo è equilatero $\Leftrightarrow$ equiangolo (è implicazione) (è inverso)

Per dimostrare $\Leftrightarrow$ si dimostra prima $\Rightarrow$ e poi $\Leftarrow$

- $\subseteq$ → sottoinsieme $A \subseteq S$ (A è un sottoinsieme di B)

  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

  $(0, 3] \subseteq \mathbb{R}$
- $\cap$ → intersezione → tutti i numeri che $\in$ sia ad A che a B

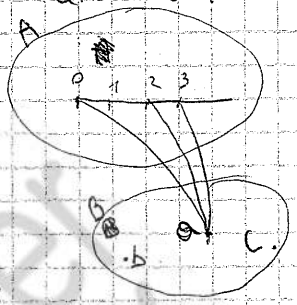
  Es. $A = (0, 2)$ $B = \mathbb{N}$ $A \cap B = \{1\}$
- $A \cup B$ → unione $A \cup B = \{(0, 2], 3, 4, 5 \dots\}$
- $|$ → tale che Es. $\{a \in A$ tale che $\dots\} = \{a \in A \mid \dots\}$

  $\{$numeri naturali pari$\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

FUNZIONE TRA INSIEMI

- A (dominio)
- B (codominio)
- f è una legge che associa ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B.

Es. $A = \mathbb{N}$, $B = \{a, b, c\}$



Es. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$x \to x \in \mathbb{R} \to \sin x \in \mathbb{R}$

- $f: A \to B$ si dice SURGETTIVA se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A tramite f

- $\forall$ → per ogni
- $\exists$ → esiste
- $\exists!$ → esiste unico

f SURGETTIVA $\forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$

Es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è surgettiva

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ non è surgettiva

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ è surgettiva

27/09/2017
Lezione 2

Def. f è suriettiva se $\forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$

Def. Immagine f $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \in B \mid a \in A\} = \{b \in B \mid f(a) = b$ per qualche $a \in A\}$

$\mathrm{Im} f \subseteq B$

f è suriettiva $\iff \mathrm{Im}(f) = B$

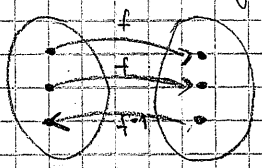
$f: A \to B$ allora $f: A \to \mathrm{Im}(f)$ (suriettiva)

INIETTIVITÀ

Def. $f: A \to B$ si dice iniettiva se $a_1 \neq a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

BIGETTIVITÀ

Def. $f: A \to B$ è bigettiva se è iniettiva e surgettiva



$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$

$A = \{\text{polinomi}\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f(a_0 + \dots + a_m x^m) = \text{grado}(a_0 + a_1 x + \dots a_m x^m)$

$a_0 + a_1 x + \dots a_m x^m \quad , a_m \neq 0 \to m$

- f non è surgettiva $(\text{Im} f \subseteq \mathbb{N})$
- f non è iniettiva perché $f(1+x) = f(x)$

Oss. $f: \{\text{polinomi}\} \to \mathbb{N}$

$a_0 + \dots a_m x^m \quad , a_m \neq 0 \to \text{grado}(a_0 + \dots a_m x^m)$

$f(x^m) \to m$

f è bigettiva $\iff \forall b \in B \ \exists! a \in A \mid f(a) = b$

$f: A \to B \quad f$ è surgettiva $\iff \forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Le funzioni si possono comporre tra di loro

$f: A \to B$

$g: B \to C$ allora $g \circ f : A \to C$

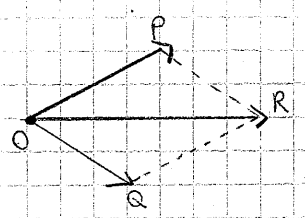
$(g \circ f)(a) = g(f(a))$



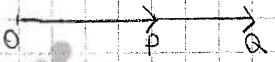
SPAZI VETTORIALI

- Piano con fissata l'origine

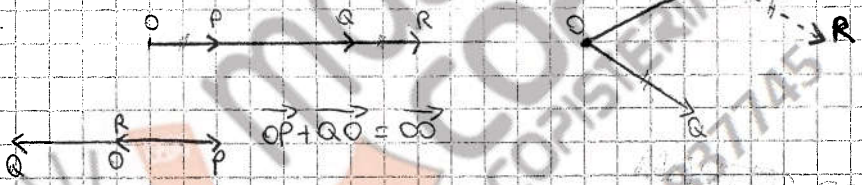
$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$
dove R è costruito con la regola del parallelogramma



Se i vettori sono paralleli, essi non generano un parallelogramma



Def. Fissato un punto O (origine), siano P e Q due punti nel piano; Allora diciamo che $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$ dove R è ottenuto come segue: R è l'estremo del vettore $\vec{OQ}$ applicato nel punto P



Def. $V_0^2 = \{\vec{OP} \mid P \text{ sta nel piano}\}$

somma $+ : V_0^2 \times V_0^2 \to (\vec{OP}, \vec{OQ}) \longrightarrow \vec{OP} + \vec{OQ} \in V_0^2$

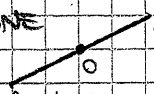
PROP. L'operazione + definita su V_0^2 come sopra, gode delle seguenti proprietà:

i) $\vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP}$ ($\vec{OO}$ el. neutro per la somma) → dim. → se mi sposto di $\vec{OO}$ (se non mi sposto), rimango nello stesso punto

ii) $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} + \vec{OP}$ (proprietà commutativa) → dim. ↓ i tre estremi del parallelogramma sono sempre gli stessi ⇒ il quarto estremo è univoco

iii) $(\vec{OP} + \vec{OQ}) + \vec{OR} = \vec{OP} + (\vec{OQ} + \vec{OR})$ (proprietà associativa)

iv) Sia B il punto simmetrico di A rispetto a O. Allora $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OO}$ (esistenza dell'inverso) ↖ Vd. DIMOSTRAZIONE



Def. $-\vec{OP}$ indicherà il vettore $\vec{OQ}$ con Q simmetrico di P rispetto all'origine.

$+ : V_0^2 \times V_0^2 \to V_0^2 \to$ SURIETTIVA perché somma di vettori, nell'insieme codominio Es. $\vec{OO} + \vec{OP} \to \vec{OP}$

$V_0^2 \times V_0^2 \to V_0^2 \to$ INIETTIVA NO per la proprietà commutativa

$(OP_1)(OP_2) \to (\vec{OP_1}) + (\vec{OP_2})$ =
$(OP_2)(OP_1) \to \vec{OP_2} + \vec{OP_1}$ ↓