FUNZIONI a + VARIABILI

DOMINIO $\{(x,y)$ per le quali $\exists f(x,y)\}$

devo trovarlo graficamente → intersecando rette, curve, circonferenze ... } non solo rette e segmenti

GRAFICO $G_f\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$ x funzioni a 2 variabili è 3DIMENSIONALE

CURVE DI LIVELLO: $\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = z\}$ → è un sottoinsieme del Dominio

non si può disegnare ma si possono rappresentare curve di livello

LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$ se $\forall x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$ $f(x) < M$ se $x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall M < 0, \exists \delta > 0$ $f(x) > M$ se $x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

ha senso studiare il limite solo x PUNTI ADERENTI } → data $\Omega \in R^n$, $x_0 \in R^n$ è aderente se $\forall \varepsilon > 0$, $J(x_0, \varepsilon) \cap \Omega \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

- metodi x verificare che $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) \to 0$
  1. dimostro $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$
  2. METODO delle COORDINATE POLARI
- metodo x verificare che lim NON ESISTE:
  1. COORDINATE POLARI
  2. RESTRIZIONI su RETTE o PARABOLE

Meta teorema
f ottenuta con
- 4 operazioni elementari
- composizioni di f elementari

è CONTINUA

DERIVATE

possiamo definire le DERIVATE PARZIALI $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ ... (ogni volta considero x, y o z come la variabile e le altre 2 costanti)

se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed $\exists \frac{\partial}{\partial x_i} f$ $\forall i$ $1 \le i \le n$ } possiamo definire il GRADIENTE

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} \right)$$

continuità: $f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$

se $\exists \nabla f(x_0, y_0) \not\Rightarrow f$ è continua in P_0

DIFFERENZIABILE

f é DIFFERENZIABILE in P_0 se $\exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid$

$$f(P_0+h) = f(x_0) + \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n + o\left(\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}\right)$$

Teo: (α_1) f DIFFERENZIABILE in $P_0 \Rightarrow f$ CONTINUA in P_0

se f é Differenziabile $\lim_{h \to 0} f(P_0+h) = f(P_0) + \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n + o(\|h\|)$

per $h \to 0$ $\lim_{h \to 0} f(P_0+h) = f(P_0) \Rightarrow f$ é CONTINUA in P_0

$\alpha_1 h_1 \to 0$, $\alpha_n h_n \to 0$, $o(\|h\|) \to$ ancora + veloc tende a 0

Teo: f DIFFERENZIABILE in $P_0 \Leftrightarrow \exists \nabla f(P_0)$ e $(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \nabla f(P_0)$

se f é differenziabile

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0) - \alpha_1 h_1 - \dots \alpha_n h_n}{\|h\|}$$

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(P_0 + e_1 h_1) - f(P_0) - \alpha_1 h_1}{h_1} = 0 \Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + e_1 h_1) - f(P_0)}{h_1}}_{\text{definizione di } \frac{\partial}{\partial x_1} f(P_0)} = \alpha_1$$

(ripeto quest'operazione fino ad e^n dove ottengo α_n)

TEOREMA del DIFFERENZIALE TOTALE

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$P_0 \in \Omega$

$+$ $\left.\begin{array}{l} \cdot\ \exists \nabla P \text{ dove } P \in I(P_0, \varepsilon) \\ \cdot\ f \text{ continua in } P_0 \end{array}\right] \Rightarrow f$ é differenziabile in P_0

MASSIMI e MINIMI

BALLA $B_{R(x_0)} = \{(x \dots) \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) < R$

INSIEME LIMITATO K LIMITATO se $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n,\ R>0 \mid B_R(x_0) \supseteq K$

(sul dominio faccio delle pallette se trovo sempre delle pallette con degli elementi fuori -> non è limitato)

INSIEME CHIUSO K è CHIUSO se $\forall x \in K\ \exists R>0 \mid B_R(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$

TEOREMA di WEIRSTRASS

$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ CHIUSO e LIMITATO} \\ f: K \to \mathbb{R} \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_M \in K,\ \exists\, x_m \in K \mid$

$f(m) \leq f(x) \leq f(M) \quad \forall x \in K$

punto interno

$x_0 \in K$ si dice interno se $\exists\, B_R(x_0) \subseteq K$

x trovare MAX, MIN:

1. cerco i punti $x_0 \in \mathring{K} \mid \nabla f(x_0) = 0$
2. studio i confini con PARAMETRIZZAZIONE $\boxed{2.1}$ MOLTIPLICATORI di LAGRANGE $\boxed{2.2}$

$\boxed{2.1}$ es: lati di un rettangolo -> trovo MIN e MAX lungo i singoli lati

$\boxed{2.2}$ data $f(x_1, \dots x_n)$ dove studiare MAX e MIN su $K \{(x_1 \dots x_n) \mid g(x_1, \dots x_n) = 0\}$

ho 2 sistemi:

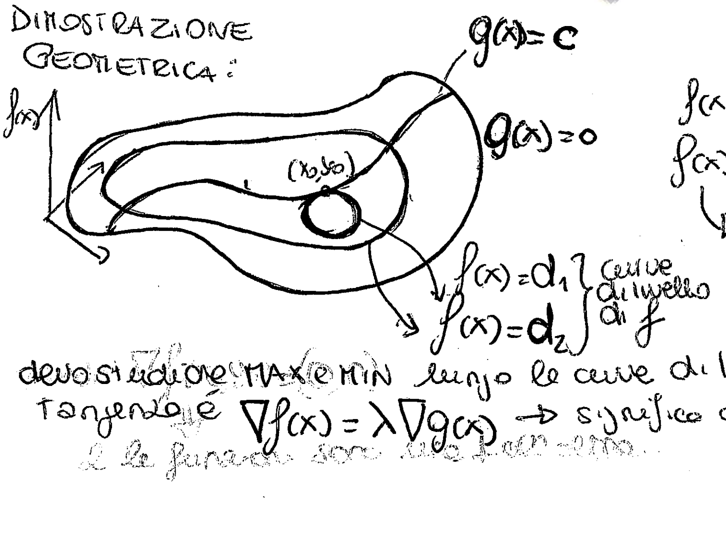
1. $\begin{cases} \nabla g(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \\ g(x) = 0 \end{cases}$ (n+1 equazioni da cui trovare n incognite)

2. $\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$ (n+1 incognite per n equazioni)

uso dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE sta nel fatto che se $\nabla f(x) = \lambda \nabla f(x)$ sono curve di livello // discoste dal vincolo $g=0$

! trovo i punti calcolo le funzioni e le confronto

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA:



$f(x) = d_2$ sta sia sopra che sotto $g(x) = c$

$f(x) = d_1$ è tangente a $g(x) = c$

↳ f e g si toccano ma non si attraversano quindi $f(x)$ rimane costante e può assumere MAX e MIN

devo studiare MAX e MIN lungo le curve di livello tangenti a g e la condizione di tangenza è $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ -> significa che i GRADIENTI sono //

e le funzioni sono tangenti...

MASSIMO LOCALE x_0 é MAX LOC. se $\exists\, \varepsilon > 0$ in cui $f(x) \le f(x_0)$

MINIMO LOCALE x_0 é MIN LOC se $\exists\, \varepsilon > 0$ in cui $f(x) \ge f(x_0)$

PUNTO di SELLA x_0 é punto di sella se $\exists$ 2 successioni x_n, y_n tali che

$$\begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to x_0 \end{cases} \text{ per } n \to \infty \qquad \begin{cases} f(x_n) > f(x_0) \\ f(y_n) < f(x_0) \end{cases}$$

Teo: x_0 punto di MAX o MIN LOCALE $\Rightarrow \nabla f'(x_0) = 0$

DERIVATE di ORDINE SUPERIORE es: $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f(x_0)$ → derivo 4 volte: 2 volte risp x, 2 volte rispetto y

teo.
- se $\exists\, \frac{\partial'}{\partial x_i \partial x_j} f$
- se $\exists\, \frac{\partial'}{\partial x_j x_i} f$
- se sono CONTINUE in un intorno di x_0

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_i}$$

⇓ se la f é abbastanza regolare $\frac{\partial}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ é uguale se derivo prima rispetto ad x o y

MATRICE HESSIANA = Matrice che ha come $a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i x_j} f(x)$

||

Matrice Simmetrica xk $\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_i}$ se f é abbastanza regolare

CALCOLO $\nabla f(x)$

$$Hf(x) = \begin{vmatrix} \nabla \partial x_1 \\ \vdots \\ \nabla \partial x_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \to \text{derivo il gradiente rispetto a } x_1 \\ \\ \to \text{'' '' '' '' '' } x_n \end{matrix}$$

la MATRICE HESSIANA é importante xk se $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ studio l'Hessiana:

1. $Hf(x_0)$ é DEF. POSITIVA $\Rightarrow$ x_0 MINIMO LOCALE $(n_+ = n)$
2. $Hf(x_0)$ é DEF. NEGATIVA $\Rightarrow$ x_0 MASSIMO LOCALE $(n_- = n)$
3. $Hf(x_0)$ é INDEFINITA $\Rightarrow$ x_0 é PUNTO di SELLA $(n_+ \neq 0, n_+ \neq 0)$
4. $Hf(x_0)$ é SEMI DEF. POS $\Rightarrow$ } non concludo niente $(n_0 \neq 0, n_+ = 0)$
5. $Hf(x_0)$ é SEMI DEF. NEG $\Rightarrow$ } $(n_0 \neq 0, n_+ = 0)$

x Mat 2 x 2 → conosco autovalori con tr A, det A

dim: $f(x_0+h) - f(x_0) + \cancel{f'(x_0)}h = 0 + \frac{1}{2!} f''(\xi) h^2$

ppongo