MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Consideriamo una qualunque funzione:

$$f: D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

il cui dominio è contenuto in $\mathbb{R}^n$ e va in $\mathbb{R}$.

esempio:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \sin(xy)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DOMINIO

in Analisi I

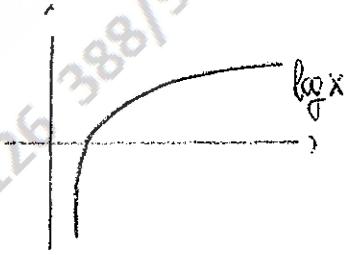
$x \xrightarrow{f} \sqrt{1-x^2}$ $\quad 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

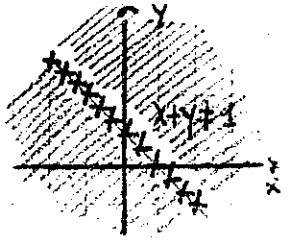
$x \xrightarrow{f} \sqrt{x^2-1}$ $\quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} \Leftrightarrow (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

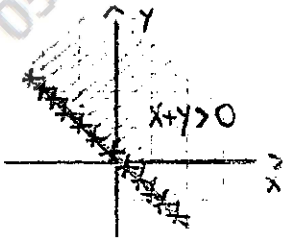
in Analisi II

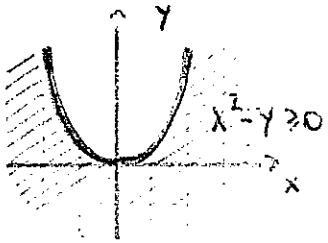
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\log(x+y)}$$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y \geq 0;\ x+y > 0;\ x+y \neq 1\}$

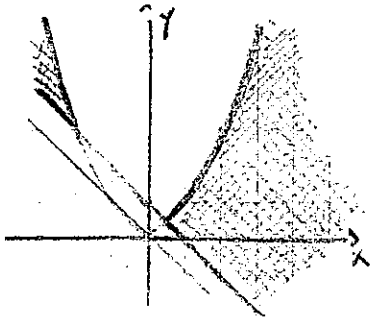








La soluzione totale della funzione sarà l'unione tra le tre soluzioni grafiche:



Definiamo $\mathbb{R}^n$ uno SPAZIO VETTORIALE, tale che

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n = 1, \dots, m \}$$

NOTA:

1) $0 \in \mathbb{R}^n$
2) è chiuso per la somma
3) è chiuso per prodotto scalare

SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(A) $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$

vettore somma può essere geometricamente visto come somma tra vettori con REGOLA PARALLELOGRAMMA



(S) preso un $\lambda \in \mathbb{R}$
e uno spazio vettoriale $\vec{x}\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Osservazione

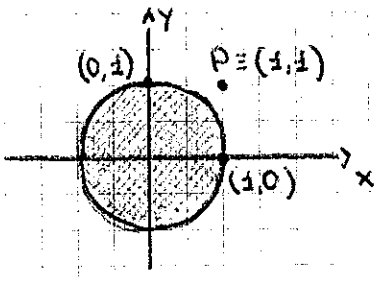
in generale NON È VERO che data una f con $D(f) \in \mathbb{R}^n$, dato $\vec{x} \in D(f)$ e $\vec{y} \in D(f)$ allora:

$$\vec{x+y} \in (D(f))$$

esempio $\quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \}$$

il punto $P = (1,1) \notin D(f)$



PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

Il prodotto scalare è un particolare tipo di prodotto che si applica tra le rispettive componenti dei vettori sommate assieme. Il risultato sarà un numero, uno scalare.

Definizione: PRODOTTO SCALARE

dati $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$

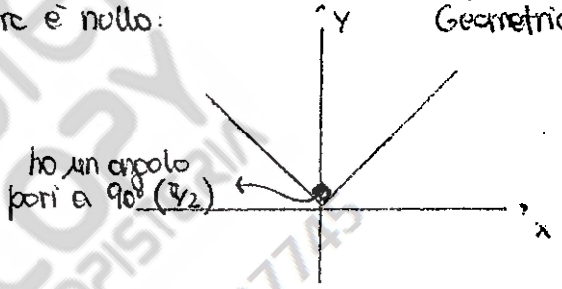
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \in \mathbb{R}$$

Osservazione:

(x_1, x_2) e (y_1, y_2) sono PERPENDICOLARI se il loro prodotto scalare è nullo:

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0$$

Interpretazione Geometrica



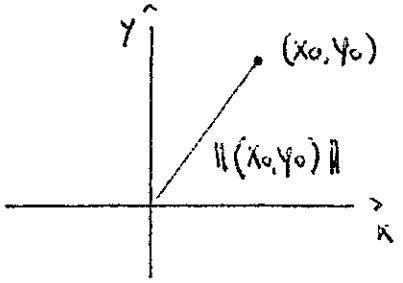
Definizione: NORMA

si definisce NORMA DI UN VETTORE $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Osservazione:

a lato geometrico, la norma non è altro che la distanza tra un punto e l'origine



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DISUGUAGLIANZA CAUCHY-SCHWARTZ

Indicando la distanza, in questo caso la norma indica la distanza dei vettori dall'origine.

Dati $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ allora $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$,

conseguentemente $|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$

Scrivendo il risultato equivalente in sommatoria:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

*sono multipli

La disuguaglianza asserisce che IL VALORE ASSOLUTO DEL PRODOTTO SCALARE DI DUE ELEMENTI È MINORE-UGUALE AL PRODOTTO DELLE LORO NORME

prodotto scalare — minore uguale (se x e y proporzionali) — prodotto tra norme

$$|\vec{x} \odot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Osservazione 1

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

dimostrazione:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

scrivendo poi:

$$ab = a\sqrt{\lambda} \cdot \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{2}a^2\lambda + \frac{1}{2\lambda}b^2$$

Osservazione 2:

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda > 0$

$$ab \leq \frac{1}{2}\lambda a^2 + \frac{1}{2\lambda}b^2$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

dimostrazione (disuguaglianza):

$$x_i y_i \leq \frac{1}{2}\lambda x_i^2 + \frac{1}{2\lambda} y_i^2$$ ⇐ Risultato ottenuto dalle precedenti Osservazioni.

riscrivendola in termini di sommatoria:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\lambda x_i^2 + \frac{1}{2\lambda} y_i^2 \right)$$

Ciò è ottenuto dal fatto che: IL VALORE ASSOLUTO DELLA SOMMA È MINORE UGUALE DELLA SOMMA DEI VALORI ASSOLUTI

riscrivo il precedente risultato come il prodotto scalare tra i vettori in valore assoluto minori uguali della norma dei singoli (come del resto si scrive come definizione iniziale)

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \frac{\lambda}{2}\|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|\vec{y}\|^2 \quad \forall \lambda > 0$$

sorge il problema di come calcolare λ

$$\lambda = \frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$ perché è generato dal rapporto di due numeri reali

quindi:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \frac{1}{2}\frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|}\|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|}\|\vec{y}\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{y}\|\|\vec{x}\| + \frac{1}{2}\|\vec{y}\|\|\vec{x}\|$$

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{y}\|\|\vec{x}\| \quad <= \text{Abbiamo quindi dimostrato l'uguaglianza di partenza scegliendo un opportuno } \lambda \in \mathbb{R}.$$ ■

DISTANZA TRA VETTORI IN $\mathbb{R}^n$

NOTA:

Ricordiamo che n (all'esponente) è un qualunque numero reale positivo.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
$\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
} possiamo indicare la distanza tra x e y nella forma:

$$d(x,y) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

che non è altro che uguale a:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

esempio $\mathbb{R}^2$, $d((1,0);(0,1)) = ?$

applicando la formula:

$$d((1,0),(0,1)) = \|1;-1\| \overset{!}{=} \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 333 9837745