DOMINIO IN $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale

vettore: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \dots n$

Esempio:

$(0, -\sqrt{2}, \pi) \in \mathbb{R}^3$

NOTAZIONE

$\vec{x} \in \mathbb{R}^2: (x, y) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3: (x, y, z)$

PROPRIETÀ IN $\mathbb{R}^n$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\vec{y} \in \mathbb{R}^n \ (y_1, y_2, \dots, y_n)$

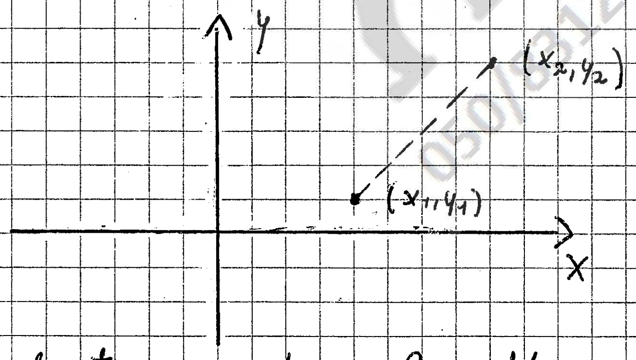
SOMMA:

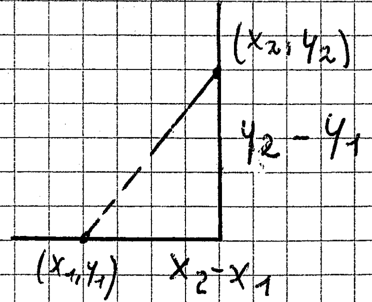
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

PRODOTTO PER UNO SCALARE $c \in \mathbb{R}$

$c\vec{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$

DISTANZA TRA DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$





La distanza tra il vettore (x_1, y_1) e il vettore (x_2, y_2) è data da:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Le generalizzo in $\mathbb{R}^n$:

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

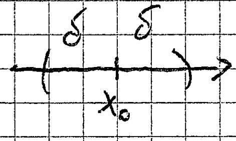
Esempio:

In $\mathbb{R}^3$ calcolare la distanza tra $(-1,3,-7)$ e $(0,-\pi,\sqrt{2})$

$$d=\sqrt{(-1-0)^2+(3+\pi)^2+(-7-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+(3+\pi)^2+(-7-\sqrt{2})^2}$$

GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI INTERVALLO

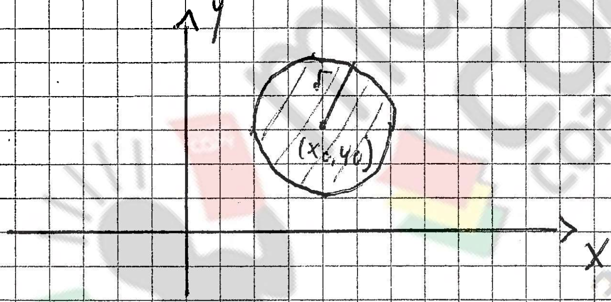
ANALISI I:



$$I_\delta(x_0)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, |x-x_0|<\delta\}$$

IN $\mathbb{R}^n$

Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^2$



Voglio descrivere tutti i punti che hanno distanza da (x_0,y_0) minore di δ

Passo da un intervallo a una sfera (disco)

$$B_\delta(x_0,y_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

In $\mathbb{R}^3$ saranno vere e proprie sfere

in $\mathbb{R}^n$:

$$B_\delta(\vec{x})=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n \,/\, d(\vec{y},\vec{x})<\delta\}$$

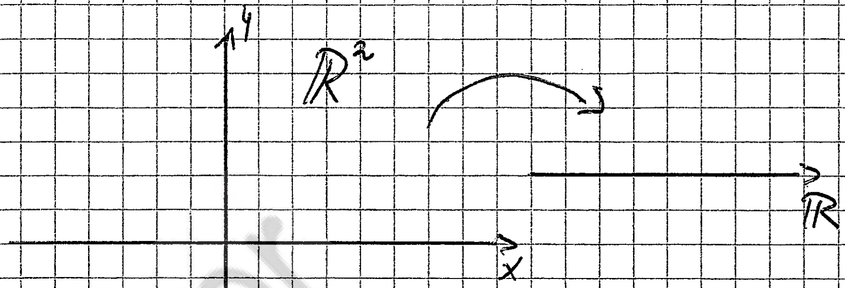
$$\vec{x} \to (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

Una funzione di n variabili è una legge che associa a vettori in $\mathbb{R}^n$ un numero reale.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n \to f(\vec{y}) \in \mathbb{R}$

Esempio:

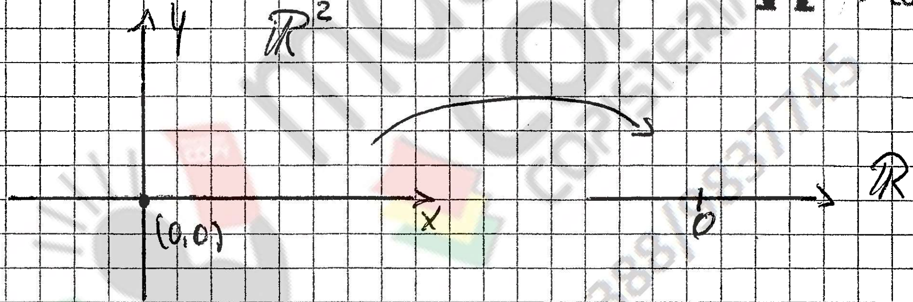
$f(x,y) = x^2 + \sin y$



Qui non ho restrizioni

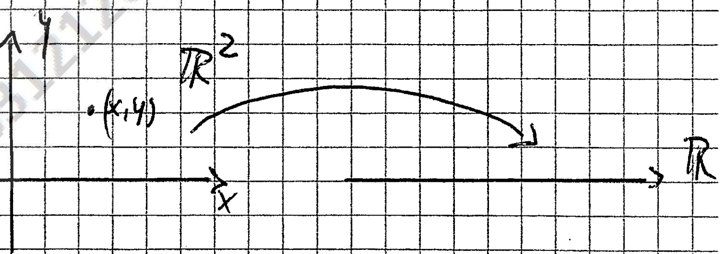
Esempio:

(0,0)



Esempio:

$f(x,y) = \log|xy|$



Per il dominio:

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$

Il logaritmo si può fare perchè ho il modulo, quando faccio log 0 non ho numeri reali

Ma $xy=0$ anche quando $x=0$, $y=0$

quindi

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{(x,0)\} \cup \{0,y\}\}$

Esempio: Rappresentare il dominio di

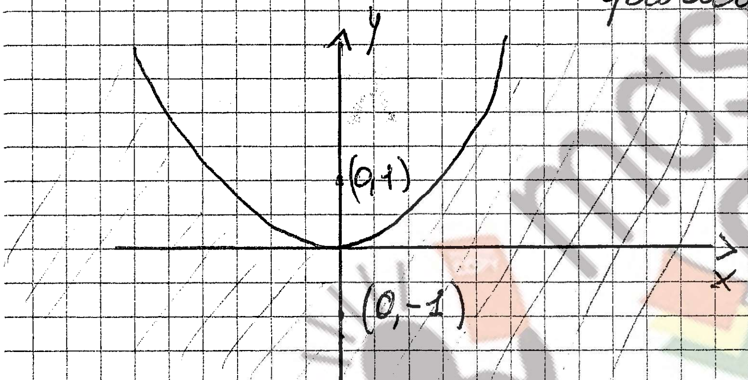
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\log(x+y)}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-y \geq 0,\ x+y>0,\ x+y \neq 1\}$$

Rappresento le condizioni su grafici separati:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-y \geq 0\}$$

$x^2-y=0 \qquad y=x^2$ prendo i punti del grafico della parabola.

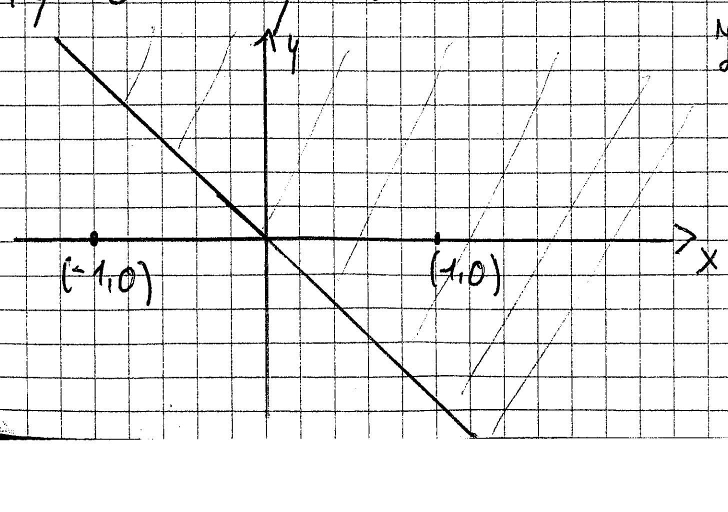


La curva divide il piano in due parti. Prendo un punto a caso dentro e fuori dalla parabola $(0,1)$, $(0,-1)$

In $(0,1)$ sostituendo trovo $-1 \geq 0$ e non è verificato. Quindi non posso considerare i punti dentro la parabola.

In $(0,-1)$ ho $1 \geq 0$ quindi devo considerare i punti esterni alla parabola.

$x+y=0 \qquad y=-x$

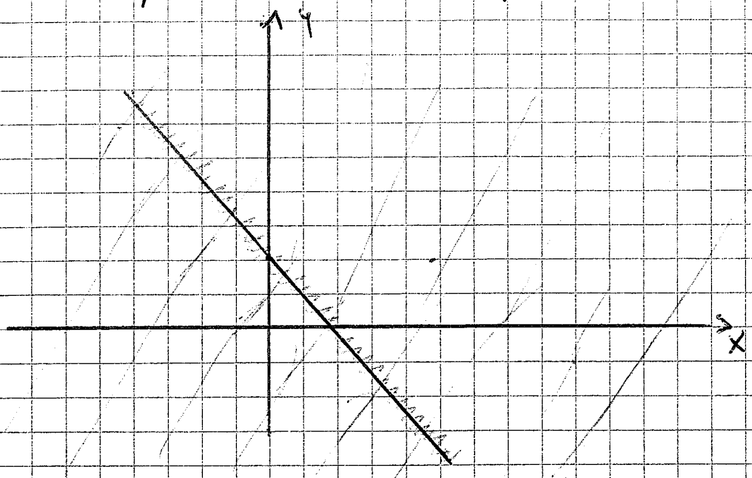


Prendo $(1,0)$, $(-1,0)$

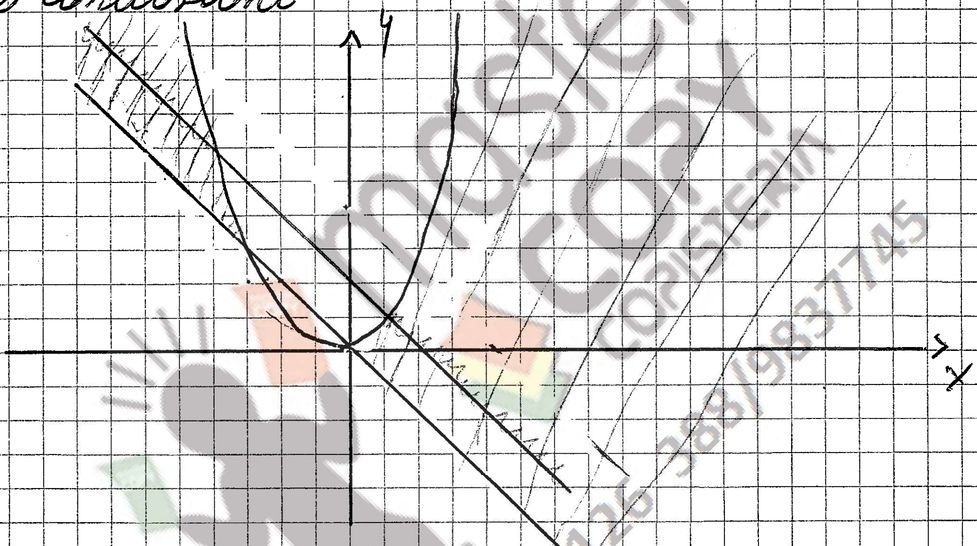
In $(1,0)$ $x+y>0$ da $1>0$ quindi si considera quella parte di piano

In $(-1,0)$ $x+y>0$ da $-1>0$ non va bene

$x+y \neq 1$ prendo il complementare $x+y=1$



Ora devo intersecare i disegni per avere verificate tutte le condizioni



Per i punti del bordo e per la retta $x+y \neq 1$ ha senso fare il limite

GRAFICI DI FUNZIONI

Analisi I $f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$

$$G_f = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R} / x \in \Omega \}$$

Analisi II $f(x,y)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Il grafico è in $\mathbb{R}^3$