26/09/2017

- SPAZIO VETTORIALE
- SISTEMI LINEARI → $ax+b=0$ $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$ 2) equazione di m incognite con potenza massima = 1
- DETERMINANTE
- TEORIA SPETTRALE (Studio degli autovalori)

TEORIA DEGLI INSIEMI (NON ASSIOMATICA)

Def: Un insieme è una famiglia di oggetti che posso descrivere in vari modi

Esempi:
$\{1, 3, \text{sedia}\}$, $\{\text{studenti B21}\}$ • un insieme è racchiuso tra parentesi graffe

INSIEME NUMERI NATURALI → $\mathbb{N}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
INSIEME NUMERI RAZIONALI → $\mathbb{R}$ $\{m/n$ tali che m, n sono in $\mathbb{N}\}$
INSIEME NUMERI REALI → $\mathbb{R}$
INSIEME NUMERI COMPLESSI → $\mathbb{C}$
Ha senso fare il prodotto tra due insieme:

- $A \times B = \{(a,b) : a$ sta in A, b sta in $B\}$

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$

$A \times B = \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (prodotto di insiemi)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x$ sta in $\mathbb{R}$, y sta in $\mathbb{R}\}$

- l'insieme dei polinomi della variabile x $\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m : a_0, a_1 \dots a_m \in \mathbb{N}\}$

$P(x) = 2, 5, \pi, \sqrt{2}$ (sono polinomi di grado 0)

$p(x) = ax + b$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ (polinomio grado 1)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ (polinomio di grado 2)

Notazione: $\in$ → appartiene, $\notin$ → non appartiene; $\Rightarrow$ → implica [(Hp) ⇒ (tesi)], $\Leftrightarrow$ → equivalenza

Esempi:
$2 \in \mathbb{N}$
$2 \in \{\text{polinomi}\}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (reale)
$\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$ (razionale)

Dimostrazione:

$\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$ dimostrato per assurdo da Pitagora

Se per assurdo → $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m ed n $\{m, n\} = 1$ se è vero $\Rightarrow$

Elevo al quadrato $2 = \frac{m^2}{n^2}$ $\Rightarrow$ $m^2 2 = m^2$ $\Rightarrow$ m^2 è pari $\Rightarrow$ m pari

$\Rightarrow m = 2k$

Ma siccome $2n^2 = m^2$ $\Rightarrow$ $2n^2 = 4k^2$ $\Rightarrow$ $n^2 = 2k^2$ $\Rightarrow$ quindi anche n^2 è pari $\Rightarrow$ n è pari e questo non è verificato poiché [supponiamo che m e n siano numeri primi]

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESEMPI:

Un triangolo è equiangolo ($\Leftrightarrow$) è equilatero

n è multiplo di 4 $\Rightarrow$ n è pari

NOTAZIONE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

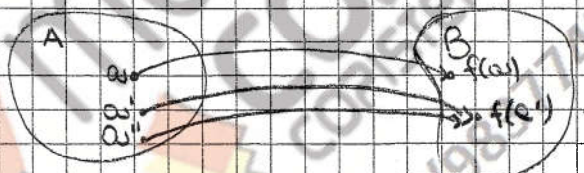
- $A \subseteq B$ (A contenuto in B)
  ↓ sottoinsieme
- $A \cap B$ (A intersecato B)

  $A = (0,2)$, $B = \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{1\}$ • intersecano quelli che soddisfano le condizioni degli insiemi di partenza
- $A \cup B$ (A unito B)

  $A = (0,2)$, $B = \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A \cup B = \{[0,2], 3, 4, 5, \dots\}$ • unisce tutti gli elementi mettendo insieme i due sottoinsiemi
- Tale che = | (o) :

FUNZIONE TRA INSIEMI

- A (dominio)
- B (codominio)



- f è una legge che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B ma non vale il contrario B può provenire anche da 2 elementi di A

ESEMPIO:

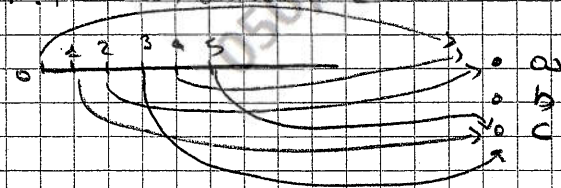
$A = \mathbb{N}$

$B = \{a, b, c\}$

1) f: ogni numero va in a



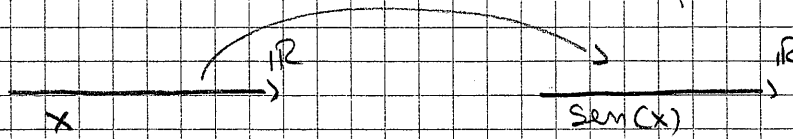
2) f: pari in a, dispari in c



ESEMPIO:

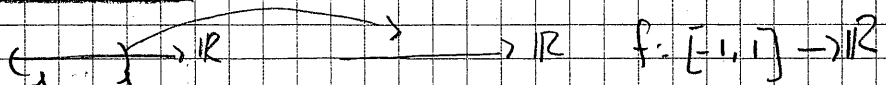
$A = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R}$



DOMINIO DI UNA FUNZIONE

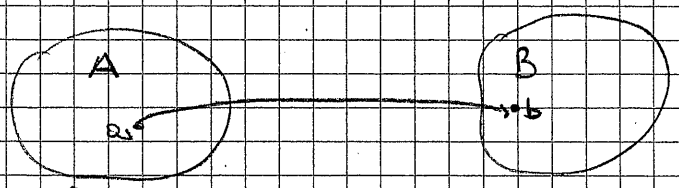
- $\sqrt{1-x^2}$



DEFINIZIONI

- $f: A \to B$ si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A tramite f

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \mid f(a) = b$$



ESEMPIO:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$ $\quad \to$ è suriettiva

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$ $\quad \to$ " "

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad \to$ non è suriettiva poiché nella sua immagine ammetterà solo numeri positivi sempre

28/09/2017

FUNZIONI

$f: A \to B$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DEFINIZIONI:

- f è iniettiva se $\forall b \in B \; \exists a \in A \mid f(a) = b$
- Immagine di f $[\mathrm{Im}(f)] = \{f(a) \in B \mid a \in A\} = \{b \in B \mid f(a) = b \text{ per qualche } a \in A\}$

  $\mathrm{Im}\, f \subseteq B$

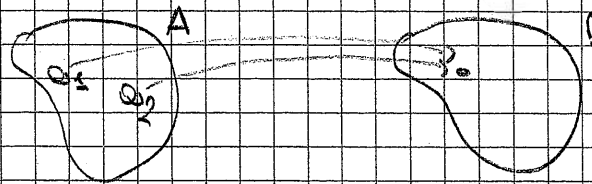
  f è suriettiva $\iff \mathrm{Im}\, f = B$

$f: A \to B$ diventa $f: A \to \mathrm{Im}\, f$ (suriettiva)

DEFINIZIONE:

$f: A \to B$

Si dice iniettivo se a_1 e $a_2 \in A$ $\quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$

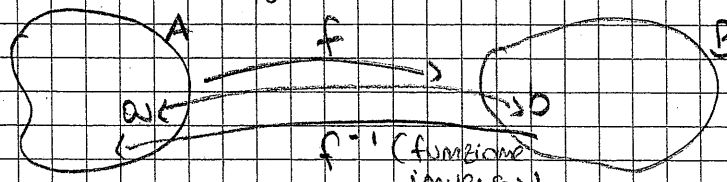


- ogni punto di B è raggiunto da un solo elemento di A

DEFINIZIONE:

$f: A \to B$ è biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva

- ogni freccia uno e uno solo elemento di A



$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$

ESEMPIO:

$A = \{\text{polinomi } \in x^m\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \longrightarrow m$ con $m \neq 0$

$f(a_0 + \dots + a_m x^m) = \text{grado}(a_0 + \dots + a_m x^m)$ (minimo 1)

Oss: Una f definita così non è suriettiva poiché $\text{Im}(f)$ è l'insieme dei contenuti in $\mathbb{R}$, non è iniettiva perché $f(x+1) = f(x)$

Oss: $f: \{\text{polinomi}\} \to \mathbb{N}$

$a_0 + \dots + a_m x^m \longrightarrow \text{grado}(a_0 + \dots + a_m x^m)$

$f(x^m) \to m$ (ogni elemento del codominio è immagine di qualcuno)

DEFINIZIONI:

- f è biiettiva $\iff \forall b \in B \ \exists! \ a \in A \mid f(a) = b$

$f: A \to B$

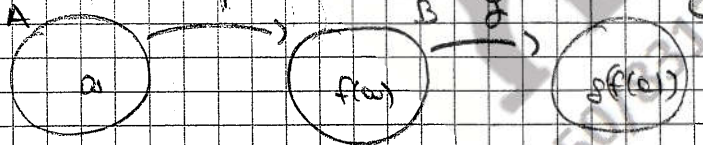
(diamo sempre dei dominio e codominio)

- f è suriettiva $\iff \forall b \in B \ \exists \ a \in A \mid f(a) = b$

Le funzioni si possono comporre tra di loro (il codominio di una deve coincidere col dominio dell'altra)

$f: A \to B$

$g: B \to C$ allora $g \circ f: A \to C$ posso definire $(g \circ f) = g(f(a))$

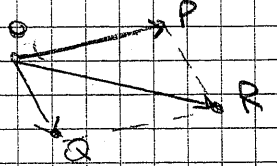


MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

SPAZIO VETTORIALE

DEFINIZIONE

- Piano: fissato l'origine e un punto P sul piano posso fare corrispondere il punto P alla freccia che parte da O



$\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ posso definire la loro somma

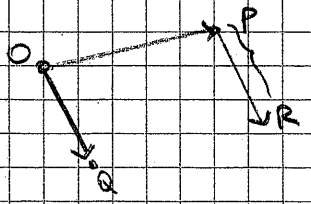
$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$ (dove R è costruito con la regola del parallelogramma)

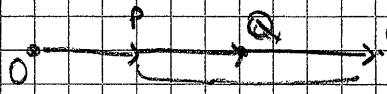
- se prendo 2 vettori // il parallelogramma non ha senso, poiché non è possibile costruirlo

DEFINIZIONE

Fissiamo un punto O, siano P e Q due punti del piano, allora diciamo che il vettore $\vec{OR} + \vec{OQ} = \vec{OR}$ dove R è ottenuto come:

- R è l'estremo del vettore $\vec{OQ}$ applicato nel punto P





MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 98837745

DEFINIZIONE:

$V_0^2 = \{\vec{OP} \mid P \text{ sta nel piano}\}$

$+ : V_0^2 \cdot V_0^2 \ni (\vec{OP}, \vec{OQ}) \longrightarrow \vec{OP} + \vec{OQ} \in V_0^2$

[V = spazio vettoriale
2 = siamo in 2D
0 = piano (origine)

Proposizione:

L'operazione + definita su V_0^2 gode delle seguenti proprietà:

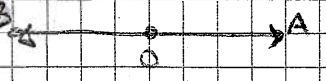
1) $\vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP}$ (elemento neutro per la somma)

2) $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} + \vec{OP}$ proprietà commutativa

3) $(\vec{OP} + \vec{OQ}) + \vec{OR} = \vec{OP} + (\vec{OQ} + \vec{OR})$ proprietà associativa

4) Sia B il punto simmetrico di A rispetto ad O allora:

$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OO}$ (vettore nullo)
($\vec{OA}$: segmento, $\vec{OB}$: segmento)



- sommo vettori uguali e opposti tra di loro

Abbiamo definito l'esistenza dell'inverso.

DEFINIZIONE

$-\vec{OP}$ individua il vettore $\vec{OQ}$ con Q simmetrico rispetto all'origine

ESERCIZIO:

$G = \{f : A \to A\}$ A insieme "$f \circ g$" dato $G \times G \ni (f, g) \longrightarrow f \circ g \in G$

(V_0^2, V_0^2, $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$; $\vec{OP} + \vec{OQ}$)

L'insieme G dotato della composizione gode delle proprietà descritte sopra 1, 3, 4, ma non gode la commutatività