04/03/19

CONTENUTO DEL CORSO

1) Funzioni a più variabili
2) Gradiente (sostituisce la derivata prima)
3) Matrice Hessiana (sostituisce la derivata seconda)
4) punti di max e min
5) integrazione (es: calcolo del baricentro di un solido, della massa di un solido a densità variabile ecc..)

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Il dominio della funzione non è più solo un' insieme di numeri ma un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ (n = numero di variabili)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad F(x,y) = z$ $\quad$ sempre x indipendente, y dipendente

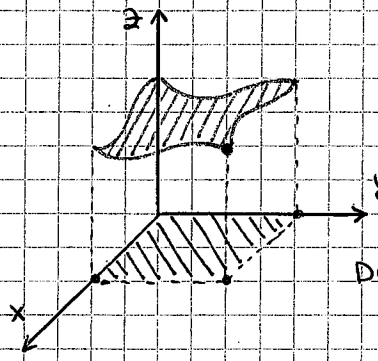
(es) $f(x,y) = x + y^2 \cdot \cos(x)$

$f(0,0) = 0 + 0^2 \cdot \cos(0) = 0$



Disegnare il grafico di una funzione a due variabili significa prendere dei punti nello spazio (non più nel piano) che rispettino l'equazione data da $f(x,y)$

GRAFICO DI $f(x,y)$: insieme dei punti (x,y,z) tali che $z = f(x,y)$



↳ non è più una linea (1D) ma una superficie (2D) quindi molto più difficile da disegnare e da analizzare

Dominio di f = insieme di punti di $\mathbb{R}^n$
$(x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$w = f(x,y,z)$ $\quad$ NON SI DISEGNA E NON SI VISUALIZZA

CODOMINIO o immagine di $f = \mathbb{R}^m$ oppure $\mathbb{R}$

Le funzioni non associano più solo un numero ad un altro numero ma anche un vettore ad un altro vettore (che può avere anche dimensioni diverse)

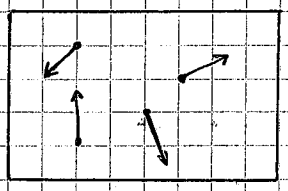
INSIEME DI DEFINIZIONE = insieme dei punti (x,y) per cui ha senso $F(x,y)$; ≈ dominio per funzioni date da una formula

VISUALIZZAZIONI

Ⓘ grafico per funzioni del tipo $z = F(x,y)$
$\in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R}^2$

Ⓘ $F(x,y)$ = vettore del piano
↓
campo di vettori $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

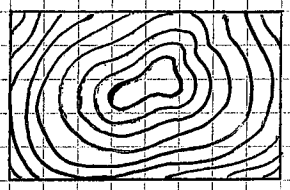
Non si disegna tutto il grafico ma mi limito a dare dei punti (basi delle frecce)



mappa dei venti

Ⓘ $\mathbb{R} \ni z = F(x,y) \in \mathbb{R}^2$

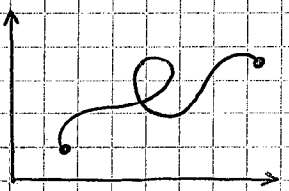
Disegno le curve dei punti (x,y) tali che $F(x,y)$ = valore assegnato (per un certo numero finito di valori)



altimetria

Ⓘ $F(t) = (x,y)$
$\in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R}^2$

Insieme dei punti $(x,y) = F(t)$ con t che varia nel Dominio di F



ESEMPI di calcolo dell'insieme di definizione

- $F(x,y) = \sin(x+y)$ $\qquad D = \{?\}$

  ↳ mi chiedo per quali (x,y) posso fare questa operazione
  ↳ posso sempre fare la somma e il seno

  Quindi $\qquad D = \mathbb{R}^2$

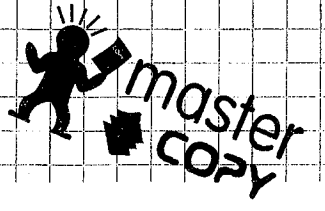
- $F(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ $\qquad D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\}$ → non posso dividere per zero

  $D(f) = \{(x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- $F(x,y) = \dfrac{\cos(xy)}{x^2-y^2}$ $\qquad D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \neq 0\}$

  $= \{(x,y) : |x| \neq |y|\}$

  $D(f) = \mathbb{R}^2 - \{\text{rette } y = \pm x\}$



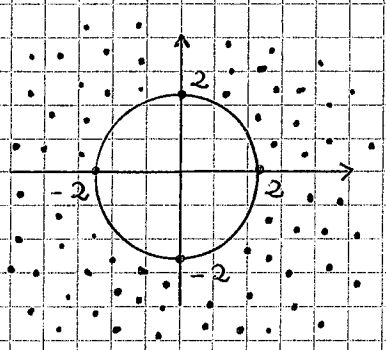
- $f(x,y) = \log(x^2+y^2-4)$

$\underline{D(f)} = \{(x,y) : x^2+y^2-4>0\}$

$x^2+y^2-4>0 \qquad x^2+y^2>4 \qquad \sqrt{x^2+y^2}>2$

$\Downarrow$

distanza dall'origine di una circonferenza



Quindi vanno bene tutti i punti esterni ad una circonferenza di raggio $R=2$

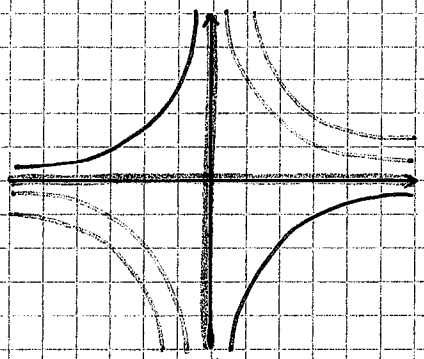
- $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin(xy)} \qquad D(f) = \{(x,y) : \sin(xy) \neq 0\}$

$\sin(xy) = 0$ se $xy = 0$ oppure $xy = \pi$ + periodo

quindi: $D(f) = \{(x,y) : xy \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = k\pi\}$ ovvero

- $xy = 0 \rightarrow x = 0 \ / \ y = 0$
- $xy = -\pi \rightarrow y = -\dfrac{\pi}{x}$
- $xy = \pi \rightarrow y = \dfrac{\pi}{x}$
- $xy = 2\pi \rightarrow y = \dfrac{2\pi}{x}$ eccetera



- $f(x,y) = \dfrac{\log(x^2+y^2-4)}{\sin(xy)}$

devo intersecare le due condizioni già trovate, i punti del dominio devono rispettarle entrambe

$D(f) = \{(x,y) : xy \neq k\pi\} \cap \{(x,y) : x^2+y^2-4>0\}$

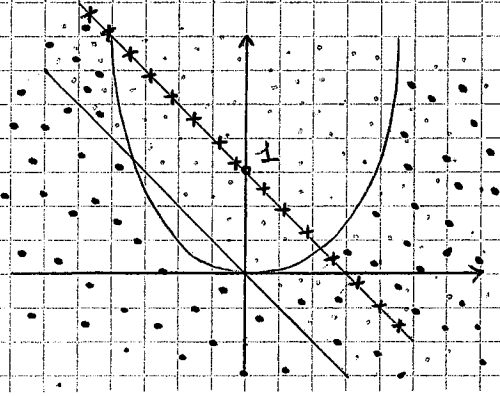
- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-y}}{\log(x+y)} \qquad D(f) = \{(x,y) : x^2-y \geq 0 \ ; \ x+y>0 \ ; \ x+y \neq 1\}$

$\Downarrow$

$\log(1) = 0$

Richiedo che:

1. $y \leq x^2$
2. $y > -x$
3. $y \neq 1-x$



prendo i punti dell'intersezione

LIMITI IN PIÙ VARIABILI

05/03/19

Analisi 1

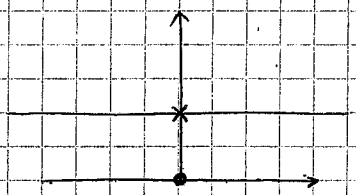
$f(x) \in \mathbb{R}$

$\lim f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$

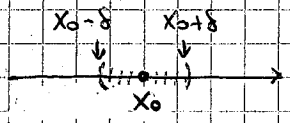
OSS x_0 potrebbe non appartenere al $D(f)$

OSS il valore del limite L non dipende dal valore di $f(x_0)$, ammesso che $x_0 \in D(f)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ $\quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Posso scrivere la definizione di limite anche come:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon \ \forall x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

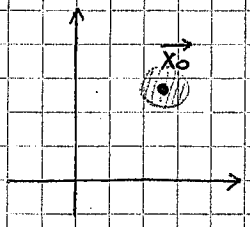
Analisi 2

$f(\vec{x}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Stesse nozioni di Analisi 1 solo che "palllette" invece di "intorni" e lavoro con vettori ($\vec{x}$) invece che con scalari (x)

★ DEFINIZIONE:
Si definisce punto di aderenza per il $D(f)$ un punto $\vec{x_0}$ tale che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad B(\vec{x_0}, \varepsilon) \cap (D(f) \setminus \{\vec{x_0}\}) \neq \emptyset$



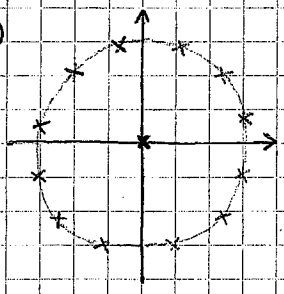
$B(\vec{x_0}, \varepsilon) \equiv B_\varepsilon(\vec{x_0})$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{x_0}) < \varepsilon\}$

DISTANZA EUCLIDEA: dati $\vec{x} = (x_1 .. x_n)$; $\vec{y} = (y_1 .. y_n)$

sarà $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2}$

ex

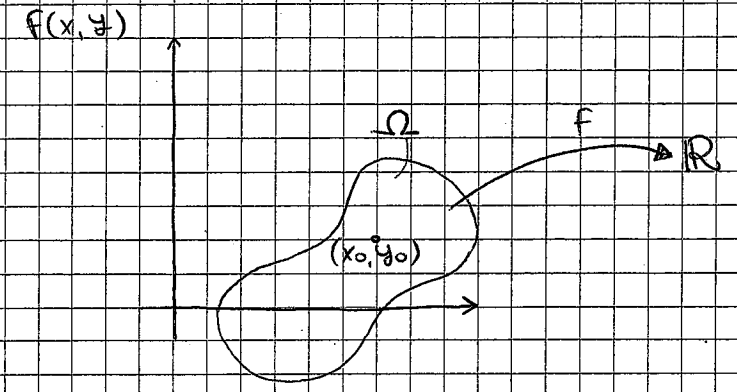


$D(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 0, \ x^2 + y^2 < 1\}$

Ogni punto al di fuori di questa circonferenza non può essere di aderenza

tutti i punti dentro e sulla circonferenza sono punti di aderenza, compresa l'origine (anche se $\notin D(f)$)

11/03/19



Restrizione di f nel punto (x_0, y_0) su una retta che passa per (x_0, y_0)

$f(x,y) = \sin(xy)$

- Restrizione di f sulla retta per $(1, \pi)$ e // all'asse y

$$f(x,y)\big|_{retta} = f(1,y) = \sin(y)$$

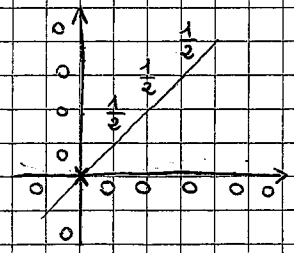
- Restrizione di f sulla retta per $(1, \pi)$ e // alla bisettrice del 1°q.

$$\text{RETTA} \quad \begin{cases} y = x + c \\ \pi = 1 + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + c \\ c = \pi - 1 \end{cases} \qquad y = x + \pi - 1 \quad \text{(Retta)}$$

$$f(x, x+\pi-1) = \sin(x\cdot(x+\pi-1))$$



$$> \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$



Restrizione sull'asse delle x → prendo $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$

Restrizione sull'asse delle y → prendo $f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$

Restrizione sulla retta $y=x$ → $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

⇒ limite non può esistere

Le coordinate polari sono utili per calcolare il lim quando esiste

Le restrizioni sono utili per verificare se esiste il limite.