2° semestre – 2018/2019

Analisi matematica 2

Nicola Visciglia
Giovanni Alberti

12 CFU (con Algebra Lineare)

master COPY

master COPY



master COPY

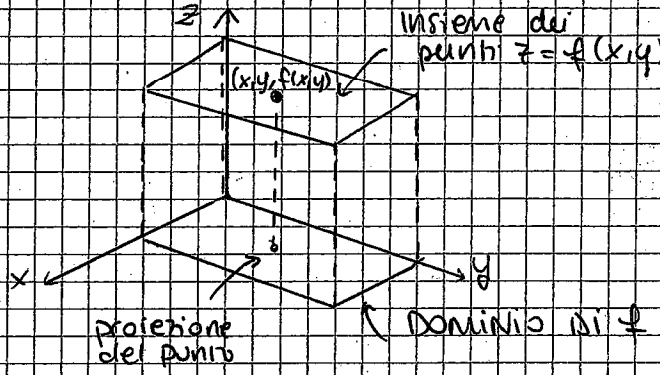
9/03/2018

CONTENUTO DEL CORSO

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

L'INPUT è una sequenza di numeri → il DOMINIO, che è dato dagli INPUT ammissibili, sarà composto da n-uple di numeri di $\mathbb{R}^n$

Grafico
$f(x,y) = z$
Insieme dei punti (x,y,z)
tali che $z = f(x,y)$



CASO GENERALE

Dominio di f Df = insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$
$((x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$

$Im(f)$ può anche essere un vettore (non necessariamente un numero).

ESERCIZI SUL DOMINIO

1) $f(x,y) = \text{sen}(x+y)$
per quali (x,y) posso calcolare $f(x,y)$?
Nessuna restrizione, allora $Df = \mathbb{R}^2$

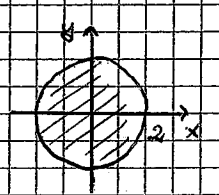
2) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

$x^2 + y^2 \neq 0 \rightarrow y^2 \neq -x^2 \rightarrow (x,y) \neq (0,0)$
$Df = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

3) $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)}{x^2-y^2}$

$x^2 - y^2 \neq 0 \rightarrow y^2 \neq x^2 \rightarrow y \neq \pm x$
$Df = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = \pm x\}$

4) $f(x,y) = \log(x^2+y^2-4)$
$x^2+y^2-4 > 0 \rightarrow x^2+y^2 > 4$
Valgono tutti i punti la cui distanza dall'origine è > 2
$Df = \{f(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} > 2\}$

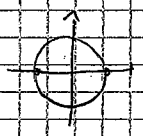


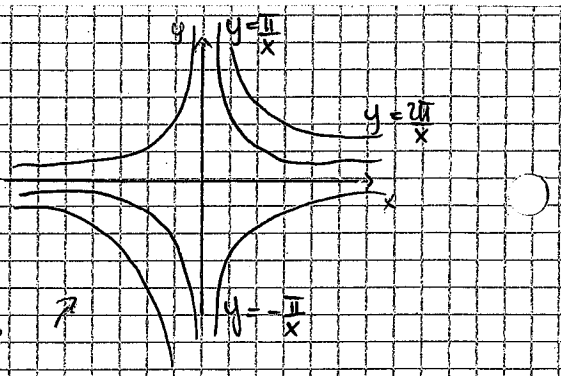
5) $f(x,y) = \frac{1}{\sin(xy)}$

$\sin(xy) \neq 0$

$xy \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \{(x,y) \mid xy \neq k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$

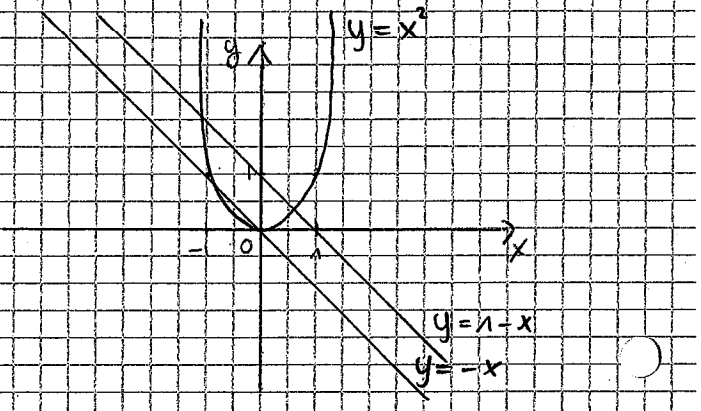




queste anche $\notin D_f$

6) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\log(x+y)}$

$$\begin{cases} x^2-y \geq 0 \\ x+y > 0 \\ x+y \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq x^2 \\ y > -x \\ y \neq -x+1 \end{cases}$$

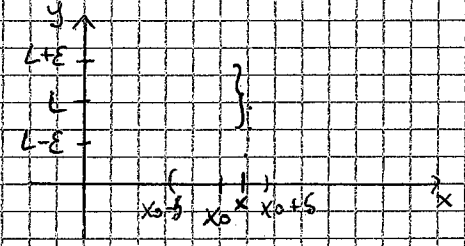


master COPY

5/03/2018

CONCETTO DI LIMITE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x)-L| < \varepsilon \text{ se } |x-x_0| < \delta \text{ e } x \neq x_0$



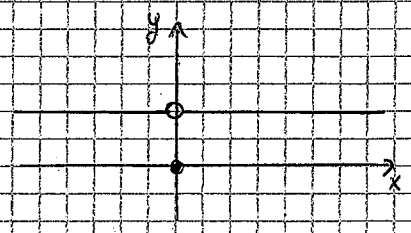
OSSERVAZIONI

1) x_0 può NON APPARTENERE a D_f

2) Il valore del LIMITE L non dipende dal valore di $f(x_0)$, ammesso che $x_0 \in D_f$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

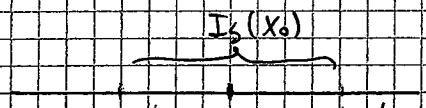


$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$

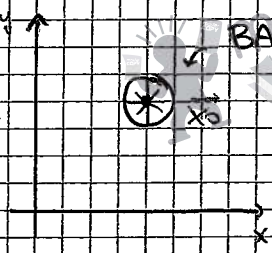
ciò che mi interessa non è $f(x_0)$, ma il suo INTORNO

INTORNINO DI RAGGIO δ

$$I_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta) = |x-x_0|<\delta \rightarrow \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$



In più variabili, l'intorno può essere definito in tutte le direzioni



- nel piano è un disco
- in $\mathbb{R}^3$ è una sfera
- nelle altre dimensioni non si può visualizzare

$$B_\delta(\vec{x_0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < \delta\}$$

$\mathbb{R}^n$

$$\vec{y}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

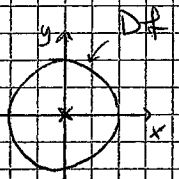
PUNTO DI ADERENZA

Def $\vec{x_0}$ si dice punto di aderenza per Df se $\forall \varepsilon > 0$,

$$B(x_0, \varepsilon) \cap Df \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Esempi

1) $Df = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2 > 0\}$



I punti del dominio sono tutti di aderenza, ma lo sono anche l'origine e i punti del bordo → ha senso calcolare $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} L \Leftrightarrow \{x_0^2+y_0^2 \leq 1\}$

2)  $\in Df$, ma non è di aderenza

DEFINIZIONE DI LIMITE

$f(x_1, \dots, x_n)$, $Df \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \begin{cases} \neq \infty \\ L \in \mathbb{R} \\ \text{non esiste} \end{cases}$$