ANALISI 2

04/03/19

G. Alberti Biasuzzi, Pagani, Selva Analisi 2

Contenuto del corso

Estensione di calcolo I per le funzioni a più variabili

1) FUNZIONI A PIU' VARIABILI

Le funzioni non dipendono da un solo input ma da un insieme di input

Il dominio della funzione non è solo un insieme di numeri ma è un insieme di punti (vettori) di $\mathbb{R}^n$ dove n è il numero di variabili

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ad esempio

Dominio di f = insieme di punti di $\mathbb{R}^n$

$f(x,y) = z$

x, y variabili indipendenti, z variabile dipendente

Le funzioni possono essere date da una formula

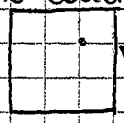
$f(x,y) = x+y$

$f(x,y) = x + y^2 \cos x$

A partire da x e y tramite la formula possiamo ricavare z che è l'output.

$f(0,0) = 0 + 0 \cos 0 = 0$

Esempio concreto



A area geografica

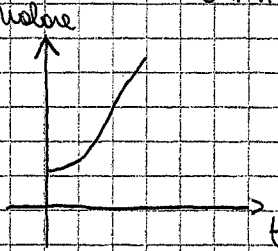
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$f(x,y)$ = temperatura il giorno fissato (1 gennaio 2019 alle ore 12) nella località di coordinate (x,y)

$f(x,y)$ = altitudine sul livello del mare della località di coordinate (x,y)

$f(x,y,z)$ = potenziale del campo gravitazionale nel punto di coordinate (x,y,z)

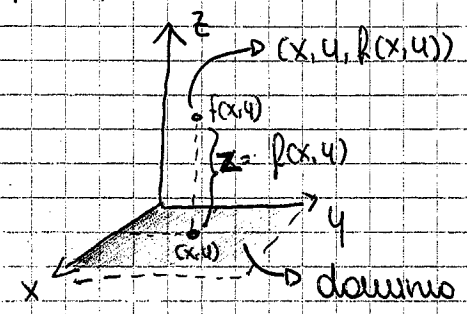
GRAFICO



Nel caso delle funzioni dipendenti dal tempo grafico utile dal punto intuitivo (funzione di una variabile)

Posso disegnare il grafico di funzioni a più variabili? È utile?

$z = f(x,y)$



$y = f(x)$

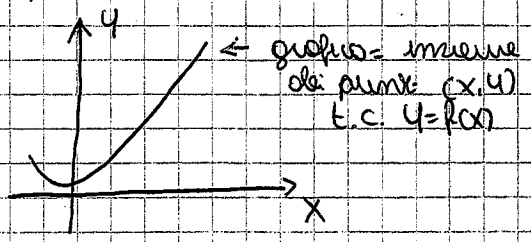
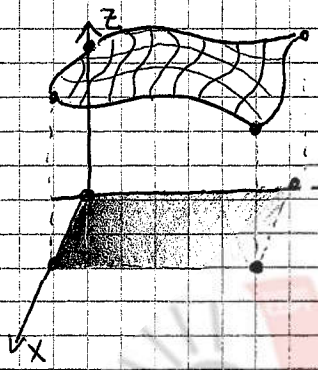


GRAFICO = insieme di punti (x,y,z) t.c. $z = f(x,y)$
Per ogni punto del piano devo prendere un'altezza che è $f(x,y)$

Se mettiamo insieme tutti i punti nel caso di una variabile otteniamo una linea nel caso di più variabili quello che otteniamo è una superficie che sta nello spazio.



Più difficile da visualizzare

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Avere una visione globale della funzione è quindi complicato.

Nel nostro quindi cercheremo di trovare un modo di visualizzare i calcoli che facciamo.

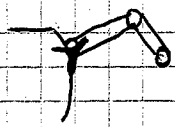
GRAFICO con 3 variabili, insieme di punti (x,y,z,w) tali che $w = f(x,y,z)$

3 gradi di libertà la quarta finisce nella base delle altre

sono figure nello spazio.

Il grafico non è utile alla visualizzazione quindi non ci disegna e non ci * (Il grafico non ci estende da quelli I.)
*visualizza.

Esempio concreto.



posizione del braccio di un robot



Due angoli: α nel piano (angolo di rotazione)

β in alto (angolo di sollevamento)

Funzione in n variabili

CODOMINIO

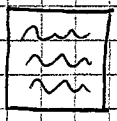
Dominio di f = insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ... , $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

Anche l'immagine / codominio può avere un numero o una sequenza di numeri (quindi un vettore)

codominio: $\mathbb{R}$ o anche $\mathbb{R}^n$

Esempio concreto:



→ area geografica marina

Vento direzione e intensità è un vettore di $\mathbb{R}^2$

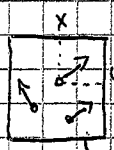
$f(x,y)$ = velocità (vettore) del vento il 1° gennaio 2019 alle ore 12 nella località di coordinate (x,y)

Input sono 2 numeri, l'output sono 2 numeri che identificano un vettore

VISUALIZZAZIONI

(I) grafico per funzioni $z = f(x,y)$ ($z \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) grafico come superficie (proiezione)

(II) $f(x,y)$ = vettore del piano



rappresentazione del vettore in "ogni" punto → insieme discreto di punti dati

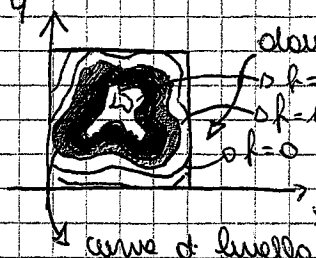
→ dominio

$f(x,y)$ = vettore → funzione o mappa "qualche" una in fisica viene detta in modo diverso

MASTER COPY
Tel 050 8312126
Cell 388 9837745

f = funzione con dominio $\in \mathbb{R}^2$ e immagine $\mathbb{R}^2$ = "CAMPO DI VETTORI"

(III) $z = f(x,y)$ ($z \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)



Disegno le curve di livello

curve di livello insieme dei punti t.c. $f(x,y)$ assume un valore fissato.

Meno immediato da leggere ma si riescono a trovare comunque delle informazioni

Anche in questo caso devo prendere un valore discreto di punti

=)

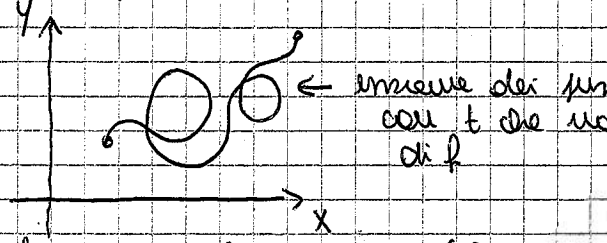
$f(t) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ESEMPIO CHE MOSTRA CHE IL CODOMINIO PUÒ AVERE DIMENSIONE MAGGIORE DEL DOMINIO. $m \geq n$

dominio $\subseteq \mathbb{R}$ Esempio legge oraria di un punto in movimento. t è il tempo output posizione di un punto nello spazio.

$f(t) = (x,y)$ legge oraria di un punto in movimento nel piano

(IV) $f(t) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(t) \subseteq \mathbb{R}$



← insieme dei punti $(x,y) = f(t)$ con t che varia nel dominio di f

Informazione che manca: "Dove eravamo ad una certa ora?" Informazione mancante.

ESTENSIONE STUDIO DI FUNZIONI

2) GRADIENTE ≈ DERIVATA

Data $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$

(dominio $\subseteq \mathbb{R}^n$, immagine $\mathbb{R}^m$)

Gradiente (rappresenta la derivata)

3) MATRICE HESSIANA (rappresenta la derivata seconda)

4) MAX e MINIMO

Esiste per una funzione a valori reali dove $m = 1$

Max e min si annulla il gradiente

5) INTEGRAZIONE

- Baricentro di un corpo solido
- Calcolo della massa di un solido a densità variabile.
- Lavoro di una forza lungo un cammino.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837

INSIEME DI DEFINIZIONE ($\cong$ DOMINIO)

Sia $f(x,y)$ data da una formula. L'insieme di definizione o l'insieme dei punti per cui la formula ha senso $D(f)$

Esempio:

- $f(x,y) = \sin(x+y)$ quale è l'insieme di definizione?

  $D = \{?\}$ per quali punti non posso fare il calcolo?

  $D = \mathbb{R}^2$

- $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

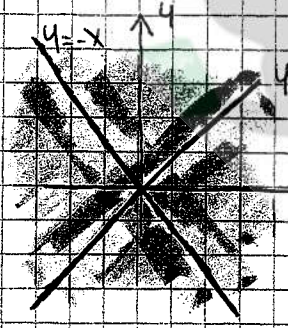
  $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\} = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

- $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)}{x^2-y^2}$ $\quad D(f) = \{(x,y) \mid ?\}$

  $x^2-y^2 \neq 0$ $\quad D(f) = \{(x,y) \mid x^2-y^2 \neq 0\}$

  $\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ y \neq \pm x \end{cases}$

  $x^2-y^2 = 0$ $\quad x^2 = y^2$ $\quad y = \pm\sqrt{x^2} = \pm x$ le radici quadrate sono sempre 2



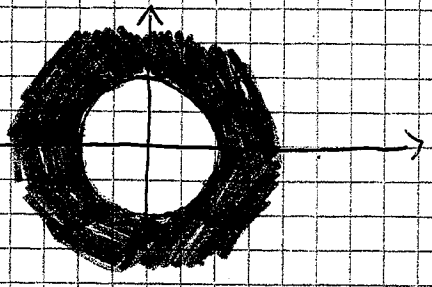
Dominio è più facile escludere le due rette.

$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{rette } y = \pm x\}$

- $f(x,y) = \log(x^2+y^2-4)$ l'argomento del logaritmo deve essere positivo.

  $D(f) = \{(x,y) \mid x^2+y^2-4 > 0\}$

Proviamo a disegnare il dominio.



$\sqrt{x^2+y^2} > 2$
distanza dall'origine

MASTER COPY
Tel. 050 8512126
Cell. 388 9837745