9/10/18

Teoria dei SISTEMI LINEARI con k-equazioni in n-incognite

$$\begin{cases} E_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ E_k: a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

proprietà: tutte le equazioni sono lineari in due variabili

Per un sistema lineare vi sono 3 possibilità:

1. $\nexists$ sol
2. $\exists!$ sol
3. $\exists \infty$ sol

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

osservazione: se $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$, allora o $\exists!$ o $\exists\infty$ sol poiché una soluzione è per $x = 0$.

come risolvere i sistemi (ALGORITMO DI GAUSS)

1) scambio di due righe
2) un'equazione viene posta uguale al suo multiplo e sommata al multiplo di un'altra equazione.

dimostrazione del principio 2

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_i = 0 \\ E_j = 0 \\ E_k = 0 \end{cases} = \begin{cases} E_1 = 0 \\ aE_i + bE_j = 0 \\ E_j = 0 \\ E_k = 0 \end{cases} \quad \text{con } a \neq 0$$

Se $E_i = 0$, $E_j = 0$, allora $aE_i + bE_j = 0$. Controllo di non aver perso soluz. $\to bE_j = 0 \to aE_i = 0$ $\begin{cases} a = 0 \text{ imp.} \\ E_i = 0 \text{ ok} \end{cases}$

$a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$

Usando dunque le MOSSE ELEMENTARI, è possibile ridursi ad un nuovo sistema con lo stesso numero di equazioni, ma in cui ogni equazione ha almeno una variabile in meno rispetto all'ep. di partenza

CONCETTO DI MATRICE

11/10/2018

Def. siano k ed n due numeri naturali, allora un elemento $A \in Mat(k \times n)$ è il dato di $k \times n$ numeri organizzati lungo k righe, lunghe n.

Esempio $A \in Mat(3 \times 3)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

per notazione, gli elementi si scrivono come a_{ij},

dove $\begin{cases} i = \text{corrisponde alla riga} \\ j = \text{corrisponde alla colonna} \end{cases}$

- INSIEME DELLE MATRICI $(k \times n, \mathbb{R})$ se $a_{ij} \in \mathbb{R}$
- " " " $(k \times n, \mathbb{C})$ se $a_{ij} \in \mathbb{C}$

(considerando anche che $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

ALCUNE MATRICI PARTICOLARI

- MATRICE QUADRATA $\in Mat(k \times k)$ $\rightarrow n = k$
- MATRICE COLONNA $\in Mat(k \times 1)$ $\rightarrow n = 1$
- MATRICE RIGA $\in Mat(1 \times n)$ $\rightarrow k = 1$
- MATRICE SIMMETRICA $\in Mat(n \times n)$ se $a_{ij} = a_{ji}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Def data $A \in Mat(k \times n)$ e $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$:

- si chiama RIGA i-ESIMA $R_i \in Mat(1 \times n)$ la riga definita dagli elementi di A: $(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$
- si chiama COLONNA j-ESIMA $C_j \in Mat(k \times 1)$ la colonna definita dagli elementi di A: $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj})$

Matrice associata a un sistema lineare

Def. dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

si definisce MATRICE DEI COEFFICIENTI ASSOCIATI

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \in Mat(k \times n)$$

e MATRICE COMPLETA

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix} \in Mat(k \times (n+1))$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Matrice a scala

Def. Un PIVOT per la riga R_i di $A \in Mat(k \times n)$ è il primo elemento $\neq 0$ di R_i.

L'unico caso in cui non vi è un PIVOT, è nel caso di una riga IDENTICAMENTE NULLA.

Def. $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} \in Mat(k \times n)$ è a scala se:

- R_i è costituita da soli zeri, allora anche la successiva sarà fatta da tutti zeri (e così a cascata)
- Il pivot di R_i (a meno che questa non sia nulla) si deve trovare più a destra del pivot della riga precedente.

Per ridurre una matrice a scala, si possono applicare le MOSSE ELEMENTARI SU MATRICE:

- scambio di righe: $R_i \longleftrightarrow R_j$
- sostituzione della riga con un suo multiplo più il multiplo di un'altra riga: $R_i \longrightarrow aR_i + bR_j$ (con $a \neq 0$)

Teorema: una matrice generica $A \in Mat(k \times n)$ può sempre essere ridotta a scala utilizzando (eventualmente più volte) le mosse elementari.

Risoluzione di un sistema lineare con le matrici:

=> dopo aver ridotto la matrice a scala, possiamo sapere il numero delle sue soluzioni:

- $\nexists$ soluzione se qualche riga ha un pivot sull'ultima colonna ($0 = \tilde{b}_k$ dove $\tilde{b}_k \neq 0$ poiché è un pivot)
- $\exists!$ soluzione se nessun pivot è sull'ultima colonna e ognuna delle prime n-colonne ha un pivot.

- $\exists \infty$ soluzioni se nessun pivot sta sull'ultima colonna e $\exists n-r$ colonne tra le prime n che sono prive di pivot (allora le soluzioni dipendono da $n-r$ parametri)

OPERAZIONI TRA MATRICI

16/10/2018

- Definizione della STRUTTURA DI SOMMA

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

devono avere le stesse dimensioni

- Definizione della STRUTTURA DI PRODOTTO PER SCALARE

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$$

- se $A \in Mat(k \times n, \mathbb{R})$, allora moltiplica solo $\lambda \in \mathbb{R}$
- se $A \in Mat(k \times n, \mathbb{C})$, allora moltiplica sia $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $\lambda \in \mathbb{C}$.

⇓

queste due operazioni definiscono una

STRUTTURA DI SPAZIO VETORIALE

- STRUTTURA DI PRODOTTO CARTESIANO

$$Mat(k \times n) \times Mat(k \times n) \ni (A, B) \xrightarrow{+} (A+B) \in Mat(k \times n)$$

$$Mat(k \times n) \times Mat(k \times n) \ni (\lambda, A) \xrightarrow{\cdot} (\lambda A) \in Mat(k \times n)$$

- PRODOTTO TRA MATRICI

$A \in Mat(k \times n)$

$B \in Mat(n \times m)$

$A \cdot B = C \in Mat(k \times m)$

↳ $C_{ij} = R_{iA} \cdot C_{jB}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745