Sito web:

http://adams.dm.unipi.it/~gronchi

Su e-learning ci sono gli esercizi svolti e delle dispense

Meccanica Razionale

Tratteremo sistemi:

- Di N punti materiali (detti discreti)
- Corpi rigidi (Continui)
- Compositi

Tratteremo due tipi di moto:

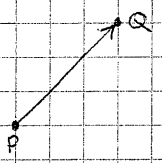
- Liberi
- Vincolati

Sistemi discreti non vincolati (liberi)

Indichiamo l'ambiente con $\mathbb{E}^3$ ed è uno spazio euclideo tridimensionale

Abbiamo quindi a che fare con uno spazio affine reale con spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ e dotato di un prodotto scalare $(\cdot)$

Dati $P, Q \in \mathbb{E}^3$:



$P - Q \in \mathbb{V}^3$

$P + \overline{v} = Q$

L'unica operazione che non ha senso in questa notazione $P + Q$ (somma di punti) non ha senso.

Prodotto scalare: Applicazione bilineare simmetrica definita sul prodotto cartesiano $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3$:

$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\overline{u} \cdot \overline{u} > 0 \quad \forall \overline{u} \neq \overline{0}$

Posso quindi definire una norma come:

$|\overline{u}| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$

Posso definire la distanza tra due punti:

$d(P, Q) = |P - Q|$

Posso definire anche lo Spazio-Tempo di Galileo:

$\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$

Lo spazio di Galileo è costituito da sottoinsiemi di questo tipo:

$\mathbb{E}^3 \times [t]$

Questi insiemi sono detti eventi simultanei

Si noti che:

$\mathbb{E}^3 \times [t] \approx \mathbb{E}^3$ poiché non è altro che $\mathbb{E}^3$ per un punto

Quindi posso misurare la distanza tra eventi simultanei definita come:

$\tilde{d}((P,t),(Q,t)) = d(P,Q)$

Non posso misurare la distanza di eventi non simultanei

Posso definire anche il prodotto vettoriale ($\times$):

Prodotto vettoriale: Applicazione bilineare antisimmetrica:

$$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \xrightarrow{\times} \mathbb{V}^3$$

Il vettore prodotto scalare soddisfa due proprietà:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$

2) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ (Prodotto misto)

N.B Per la 2 (Prodotto misto) posso permutare di continuo a sinistra ed il risultato non cambia (permuto i vettori)

Su $\mathbb{V}^3$ dotato di $(\cdot)$ esistono 2 prodotti vettoriali $\times'$, $\times''$

Data $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ base ortonormale. $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$\hat{e}_1 \times' \hat{e}_2 = \hat{e}_3$, $\hat{e}_2 \times' \hat{e}_3 = \hat{e}_1$, $\hat{e}_3 \times' \hat{e}_1 = \hat{e}_2$ Delta di Kronecker

oppure

$\hat{e}_1 \times'' \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$, $\hat{e}_2 \times'' \hat{e}_3 = -\hat{e}_1$, $\hat{e}_3 \times'' \hat{e}_1 = -\hat{e}_2$

Le operazioni differiscono solo per il segno.

Terne destrogire

È una terna che soddisfa la regola della mano destra

$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

Scelta una terna levogira scelgo il prodotto scalare.
La terna può seguire anche la regola della mano sinistra.
In generale preferisco la terna destra ed il prodotto vettore ($\times'$).

Prodotto vettoriale triplo:

$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w} \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V^3$

N.B. Non devo mai dimenticare le parentesi perché il prodotto triplo NON è associativo!

$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$

Proprietà:

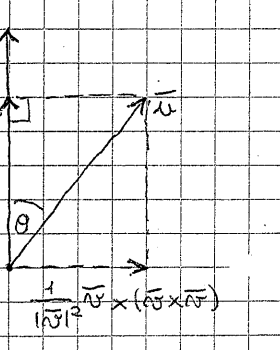
$|\bar{u} \times \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 \cdot |\bar{v}|^2 - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2$ ← Se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono ortogonali questo termine è zero.

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{u} \times \bar{v}$ ← Posso vedere questa cosa come un prodotto misto

$= \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{u}$

$= [|\bar{v}|^2 \bar{u} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{v}] \cdot \bar{u}$

Scomposizione di un vettore in due direzioni ortogonali con componente parallela ad una direzione assegnata.



Fisso $\bar{v} \in V^3 \qquad \theta \in [0, \pi]$

$\bar{u} = \frac{1}{|\bar{v}|^2}\left[(\bar{v} \cdot \bar{u})\bar{v} + \underbrace{\bar{v} \times (\bar{u} \times \bar{v})}_{|\bar{v}|^2 \bar{u} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{v}}\right]$

$\cos(\theta) = \frac{(\bar{v} \cdot \bar{u})}{|\bar{v}||\bar{u}|}$

Questo dimostra che:

$|\bar{u} \times \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \underbrace{(1 - \cos^2(\theta))}_{\sin^2(\theta)}$

Prendo $\mathbb{R}^3$:

Definisco $u \cdot v = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$ e $u \times v = (u_1 v_2 - u_2 v_1)e_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)e_2$

con $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sistemi di riferimento

Li indichiamo con $\Sigma = O\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

con $O \in \mathbb{E}^3$ $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ $\hat{e}_j \in \mathbb{V}^3$

$t \longmapsto \{O(t), \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t)\}$

Rappresentazione in coordinate $\Sigma\, O\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow (P-O) = \sum_{j=1}^{3} x_j \hat{e}_j$ ← Combinazione lineare dei vettori di base

$\uparrow \mathbb{V}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

Descrizione del moto $t \longmapsto P(t) \in \mathbb{E}^3$

Posizione $\overline{xP} = P - O = \sum_{j=1}^{3} x_j \hat{e}_j$

Velocità di P in Σ $\overline{vP} = \left.\frac{d(P-O)}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \hat{e}_j$

Accelerazione di P in Σ $\overline{aP} = \left.\frac{d^2(P-O)}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{3} \ddot{x}_j \hat{e}_j$

$\overline{F_j}$ forza su P_j $P_1, \dots, P_m$ $m_1, \dots, m_j$

$\overline{F_j}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_m}; \overline{v_1}, \dots, \overline{v_m}; t)$ la forza dipende da $\overline{x}$, $\overline{v}$ e t

Assumiamo che valgano le equazioni di Newton:

$m_j \ddot{x}_j = F_j(x, v, t)$ $j = 1, \dots, n$ una volta fissato Σ

Ricordiamo il teorema di Cauchy:

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ Sappiamo che dato le C.I. $\exists$ almeno una soluzione locale

$\ddot{x} = \frac{F}{m}(x, \dot{x}, t)$

$X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$

Posso dire che: $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{F}{m}(x, v, t) \end{cases}$ del I° ordine

$f(x, v, t) = \left(\frac{\vec{F}}{m}(x, v, t)\right)$

Sistemi di riferimento inerziali

Sistemi nei quali un moto persiste nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme fino all'azione di un forza sullo stesso (Galileo).

Noi definiamo questi sistemi con sistemi aventi proprietà di invarianza.

Trasformazioni di Galileo: Trasformazioni affini dello spazio-tempo G che lasciano invariati gli intervalli di tempo tra 2 eventi, compresa l'orientazione, e la distanza tra eventi simultanei.

$G = \underset{(x,t)}{\mathbb{R}^3} \times \mathbb{R}$ le trasformazioni di Galileo sono un gruppo algebrico G

$g_1(x,t) = (x + tu, t) \quad u \in \mathbb{R}^3$

$g_2(x,t) = (x + y, t + s) \quad y \in \mathbb{R}^3, \; s \in \mathbb{R}$

$g_3(x,t) = (Gx, t) \quad G \in O(3) = \{G \in M(3,3) : G^T G = I = G G^T\}$

Sappiamo che:

$O(3)$, $\det(G) = \pm 1$

$\det[G^T G] = \det G^2 = 1$

Prendo le matrici con $\det = 1$:

Questo gruppo lo annoto come $SO(3)$ (gruppo speciale 3)

Si può dimostrare che $SO(3)$ è un gruppo di matrici di rotazione

Sistema di riferimento inerziale

Un sistema di riferimento in cui le equazioni di Newton, per un qualunque sistema isolato di punti materiali, risultano invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo.

$\mathbb{R}^{3N} \ni x(t)$ soluzione di $m_i \ddot{x}_i = F_i(x_i, \dot{x}_i, t) \quad i = 1, \dots, N$

$g\,x(t)$ è ancora soluzione di $m_i \ddot{x}_i = F_i(x_i, \dot{x}_i, t)$

Le trasformazioni mandano soluzioni in soluzioni